



Ο ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Γενική εισαγωγή: Κυματοσωματιδιακός δυΪσμός και κλασική φυσική^(*)

Ο κυματοσωματιδιακός δυΪσμός του φωτός και ο κυματοσωματιδιακός δυΪσμός της ύλης: Δύο όψεις μιας ενιαίας αρχής.

Το περιεχόμενο τούτου του πρώτου κεφαλαίου είναι αρκετά σαφές από τον τίτλο του. Θα εξετάσουμε εκείνα τα φαινόμενα μέσα από τα οποία αποκαλύφθηκε ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία δεν έχει τον καθαρά κυματικό χαρακτήρα που της αποδίδει η κλασική φυσική αλλά έχει ταυτόχρονα και σωματιδιακή υπόσταση με σωματιδιακό φορέα αυτό που αποκαλούμε σήμερα *φωτόνιο*: το σωματίδιο του φωτός. Όμως ο κυματοσωματιδιακός δυΪσμός του φωτός –δηλαδή η διαπίστωση ότι το φως είναι *κύμα* και *σωματίδιο* ταυτόχρονα– είναι απλώς η μία όψη μιας γενικότερης αρχής. Διότι παράλληλα με τη διπλή φύση του φωτός ανακαλύφθηκε επίσης και το αντίθετό της. Ότι δηλαδή μια φυσική οντότητα όπως τα σωματίδια –π.χ. το ηλεκτρόνιο, το πρωτόνιο, κ.λπ.– τα οποία μέσα στο κλασικό πλαίσιο θεωρούνται αποκλειστικά ως σωματίδια, εκδηλώνουν επίσης και κυματική συμπεριφορά. Είναι σωματίδια και κύματα ταυτόχρονα. Αυτός είναι ο περίφημος *κυματοσωματιδιακός δυΪσμός της ύλης*, ο οποίος σε συνδυασμό με τον κυματοσωματιδιακό δυΪσμό του φωτός συγκροτούν τις δύο όψεις μιας ενιαίας

^(*) Δεν απαιτείται τίποτα περισσότερο από μια «ανάλαφρη ανάγνωση» τούτης της εισαγωγής. Σκοπός της είναι να προσφέρει μια γενική εποπτεία στα όσα θα εκτεθούν στα δύο πρώτα κεφάλαια του βιβλίου ώστε να είναι εκ των προτέρων φανερό το νόημά τους. Το οποίο γίνεται αντιληπτό μόνο εν όψει του τελικού αποτελέσματος: της ανακάλυψης της αρχής του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού. Όμως η πλήρης σημασία κάποιων από τις παρατηρήσεις που γίνονται εδώ θα φανεί καθαρά καθώς προχωράει η μελέτη του βιβλίου.

φυσικής αρχής: Της *αρχής του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού*. Η βαθμιαία ανακάλυψη αυτής της αρχής – η οποία απλώνεται σε όλο το πρώτο τέταρτο του περασμένου αιώνα – αποτελεί μια από τις πιο συναρπαστικές περιόδους στην ιστορία της επιστήμης. Αν και τίποτα δεν προμήνυε τον ερχομό της.

Η κλασική φυσική στο τέλος του 19ου αιώνα. Γαλήνη πριν την καταιγίδα.

Το ιστορικό πλαίσιο είναι πολύ γνωστό. Προς τα τέλη του 19ου αιώνα η κλασική φυσική – κλασική μηχανική, ηλεκτρομαγνητική θεωρία, στατιστική μηχανική – είχε φτάσει πια στην ιστορική της ολοκλήρωση. Ύστερα από μια μακράιωνη διαδικασία ενοποίησης και σύνθεσης, μια

τεράστια ποικιλία εμπειρικών νόμων είχε πια συμυκνωθεί σε έναν εκπληκτικά μικρό αριθμό θεμελιωδών εξισώσεων με βάση τις οποίες φαινόταν κατ' αρχήν δυνατόν να ερμηνευτούν όλα τα φυσικά φαινόμενα. Στους φυσικούς της εποχής κυριαρχεί η αντίληψη ότι ο οριακός – και μέχρι σήμερα ανεκπλήρωτος – στόχος της φυσικής να φτάσει σε μια έσχατη και τελική ερμηνεία του υλικού κόσμου είχε πραγματοποιηθεί. Το καθήκον που έμενε για τις επόμενες γενιές των φυσικών ήταν να καταπιαστούν με την εφαρμογή αυτών, των μια για πάντα διατυπωμένων, θεμελιωδών εξισώσεων για την ανάλυση ολοένα και πιο πολύπλοκων εκδηλώσεων της υλικής πραγματικότητας. Τα λόγια του Α. Michelson – του γνωστού από το ομώνυμο πείραμα – ακούγονται σήμερα ως τραγική ειρωνεία. Να τι έγραφε ο Michelson το 1899:

«Όλοι οι θεμελιώδεις νόμοι και τα πρωταρχικά δεδομένα της φυσικής επιστήμης έχουν ήδη ανακαλυφθεί και είναι τόσο σταθερά εδραιωμένα ώστε η πιθανότητα να ανατραπούν κάποτε ως αποτέλεσμα νέων ανακαλύψεων είναι τελείως μακρινή.»

Η συνέχεια είναι γνωστή. Λίγους μήνες μετά την προαναγγελία του «τέλους της φυσικής» από τον Michelson, ο Max Planck θα ανακοινώσει στην Ακαδημία του Βερολίνου την εργασία του για το μέλαν σώμα, η οποία θα θέσει σε κίνηση μια χιονοστιβάδα εξελίξεων που θα οδηγήσουν τελικά – το 1927 – στην πλήρη ανατροπή της κλασικής φυσικής και την εγκαθίδρυση ενός νέου επιστημονικού καθεστώτος: της κβαντικής μηχανικής.

Ο ρόλος μας «ιστορικής» εισαγωγής στην κβαντομηχανική.

Τα δραματικά γεγονότα αυτής της «ηρωικής περιόδου» της κβαντομηχανικής – δηλαδή η βαθμιαία ανακάλυψη της αρχής του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού – αποτελούν το αντικείμενο των δύο κεφαλαίων που ακολουθούν. Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός είναι το αντικείμενο

του πρώτου κεφαλαίου και ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης του δεύτερου. Όμως θα πρέπει να διευκρινίσουμε από τώρα ότι ο σκοπός και των δύο κεφαλαίων δεν είναι ιστορικός. Δεν είναι να αφηγηθούμε το χρονικό μιας επιστημονικής επανάστασης, αλλά να καταλάβουμε τη θεωρία που προέκυψε από αυτήν: να καταλάβουμε την κβαντομηχανική. Και η άποψη τούτου του

βιβλίου είναι κατηγορηματική πάνω σ' αυτό. Είναι αδύνατο να καταλάβουμε σωστά την κβαντομηχανική αν δεν συνειδητοποιήσουμε πρώτα την πλήρη χρεωκοπία της κλασικής φυσικής στο ατομικό επίπεδο. Την απόλυτη αδυναμία της να ερμηνεύσει όχι κάποια λεπτομερειακά χαρακτηριστικά του ατομικού μικρόκοσμου αλλά την ίδια την ύπαρξη των βασικών συστατικών του: των ατόμων και των μορίων. Θα μπορούσαμε, βεβαίως, να υπηρετήσουμε αυτή την παιδαγωγική επιλογή και με έναν διαφορετικό τρόπο. Να επιλέξουμε όχι με ιστορικά αλλά με σύγχρονα παιδαγωγικά κριτήρια εκείνα τα φαινόμενα που αναδεικνύουν με τον πιο καθαρό τρόπο το αδιέξοδο της κλασικής φυσικής στο ατομικό επίπεδο, και υποδεικνύουν ταυτόχρονα την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθεί η θεωρητική τους ερμηνεία. Είναι όμως πολύ ενδιαφέρον –στην πραγματικότητα είναι *συναρπαστικό*– ότι, στην περίπτωση της κβαντομηχανικής, η ιστορία έχει κάνει για μας την καλύτερη παιδαγωγική επιλογή. Τα κλασικά φαινόμενα της ηρωικής περιόδου (1900-1927) της κβαντομηχανικής –ακτινοβολία του μέλανος σώματος, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, υδρογονικό φάσμα, ατομική σταθερότητα, φαινόμενο Compton– είναι ακριβώς εκείνα που θα επέλεγε και σήμερα κανείς προκειμένου να παρουσιάσει την κβαντομηχανική με έναν παιδαγωγικά πειστικό τρόπο. Θα τα επέλεγε όμως και για έναν πρόσθετο λόγο: διότι είναι σημαντικά αυτά καθ' εαυτά. Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος ή το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι θεμελιώδη φαινόμενα από την ίδια τους τη φύση και όχι επειδή «έτυχε» να διαδραματίσουν έναν ιστορικό ρόλο στην ανακάλυψη της κβάντωσης του φωτός. Θα μπορούσε μάλιστα να υποστηρίξει κανείς πολύ βάσιμα ότι ο ιστορικός αυτός ρόλος δεν είναι καθόλου τυχαίος. Τόσο το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο όσο και η θερμική ακτινοβολία των σωμάτων (\equiv ακτινοβολία μέλανος σώματος) είναι τόσο θεμελιώδη κβαντικά φαινόμενα, ώστε θα ήταν πολύ απίθανο να μην «περάσει» η ανακάλυψη των κβαντικών νόμων μέσα από αυτά. Ενώ το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το υδρογονικό φάσμα, την ατομική σταθερότητα ή το φαινόμενο Compton, δηλαδή τα άλλα «ιστορικά φαινόμενα» της κβαντικής φυσικής. Είναι όλα τους σημαντικά για απολύτως σύγχρονους λόγους.

Μια «παιδαγωγική ανακατασκευή» της ιστορίας.

Παρ' ότι όμως υπηρετεί στενά διδακτικούς στόχους, μια τέτοια εισαγωγή στην κβαντομηχανική έχει και μια υποχρεωτική ιστορική διάσταση, αφού αναφέρεται στα «ιστορικά» κβαντικά φαινόμενα, οπότε και οι αναφορές στο ιστορικό πλαίσιο της κάθε ανακάλυψης είναι αναπόφευκτες. Είναι λοιπόν αναγκαίο να διευκρινιστεί από τώρα ότι η δική μας παρουσίαση αυτού του ιστορικού πλαισίου είναι ακριβής μόνο ως προς τις χρονολογίες και τα πρόσωπα αλλά όχι αναγκαστικά ως προς τη διαδικασία της ανακάλυψης καθ' εαυτήν. Ως προς την οποία υιοθετούμε μια προσέγγιση που μπορεί να χαρακτηριστεί περισσότερο ως «παιδαγωγική ανακατασκευή της ιστορίας»

παρά ως ιστορία καθ' εαυτήν. Το ερώτημα που θέτουμε στον εαυτό μας είναι τούτο: πώς θα ανακαλύπταμε σήμερα τους κβαντικούς νόμους αν είχαμε μπροστά μας τα ίδια δεδομένα που είχαν και οι φυσικοί των αρχών του 20ού αιώνα αλλά γνωρίζαμε και τις ... απαντήσεις που αυτοί έδωσαν! Ο αναγνώστης ίσως θεωρήσει αυτή την «επανανακάλυψη» τετριμμένη ή ακόμα και αστεία. Μοιάζει σαν να ανακαλύπτουμε τον ... δολοφόνο έχοντας διαβάσει πρώτα το μυθιστόρημα ή έχοντας δει το τέλος της ταινίας! Δεν είναι όμως ακριβώς έτσι. Διότι το πρόβλημα που θέτουμε δεν είναι να ξαναβρούμε τον δολοφόνο αλλά να *ανασυγκροτήσουμε τη λογική της ανακάλυψής του*. Να κατασκευάσουμε τη «λογική γραμμή» που συνδέει τα επιμέρους στοιχεία και τις μεμονωμένες ενδείξεις επανερμηνεύοντάς τα στο φως του τελικού αποτελέσματος. Αυτό σίγουρα δεν είναι πραγματική ιστορία, είναι όμως μια αναγκαία διαδικασία για την *κατανόηση* κάθε θεμελιώδους φυσικής θεωρίας.

Το πρώτο βήμα μιας τέτοιας παιδαγωγικής προσέγγισης είναι, βεβαίως, η ... αποκάλυψη του δράστη. Να απαντήσουμε στο ερώτημα: τι προκάλεσε την κατάρρευση της κλασικής φυσικής; Η απάντηση είναι, βεβαίως, γνωστή: *η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού*. Δηλαδή η διαπίστωση – ύστερα από περίπου είκοσι πέντε χρόνια πειραματικής έρευνας του μικρόκοσμου – ότι *τα πάντα στη φύση έχουν διπλή υφή*. Είναι σωματίδια και κύματα ταυτόχρονα.

Κυματοσωματιδιακός δυΪσμός και κλασική φυσική: Μια αδύνατη συνύπαρξη.

Αν αυτή η διαπίστωση είναι σωστή – και τώρα πλέον γνωρίζουμε ότι είναι – τότε δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι αρκεί για να σκοτώσει την κλασική φυσική. Και ο λόγος είναι απλός. Μέσα στο κλασικό πλαίσιο η συνύπαρξη σωματιδιακών και κυματικών ιδιοτήτων είναι όχι απλώς αδύνατη αλλά και λογικά αδιανόητη. Ας δούμε γιατί. Κατ' αρχάς, μέσα στο κλασικό πλαίσιο ένα σωματίδιο δεν είναι παρά ένας *εντοπισμένος* και *αδιαίρετος* κόκκος ύλης που κινείται πάνω σε μια καλά καθορισμένη τροχιά σύμφωνα με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής (εξίσωση του Νεύτωνα). Αντίθετα, ένα κύμα – π.χ., ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα – είναι μια *εκτεταμένη* φυσική διαταραχή που μπορεί κάλλιστα να *διαιρεθεί*, π.χ., με την τοποθέτηση ενός εμποδίου ή μιας ημιανακλαστικής επιφάνειας στη διαδρομή του. Μέσα στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής, λοιπόν, οι έννοιες σωματίδιο και κύμα είναι απολύτως ασυμβίβαστες και αμοιβαία αποκλειόμενες. Η διάκριση *σωματίδιο-κύμα* προσλαμβάνει στην κλασική φυσική τις διαστάσεις μιας καθαρά λογικής αντίφασης ανάμεσα στα αντιθετικά ζεύγη εννοιών *εντοπισμένο* και *αδιαίρετο* αφ' ενός (\equiv σωματίδιο) και *εκτεταμένο* και *διαιρετό* αφ' ετέρου (\equiv κύμα).

Μια αναδρομική ματιά στην ιστορία: Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός και το τέλος της κλασικής φυσικής.

Κοιτάζοντας λοιπόν την κλασική φυσική με αυτή την εκ των υστέρων σοφία, γνωρίζουμε πολύ καλά και ποια ήταν η *αχίλλειος πτέρνα* της και με ποιον ακριβώς τρόπο ήταν καταδικασμένη να πεθάνει. Το προδικασμένο τέλος της θα ερχόταν με την αναπόφευκτη πειραματική διαπίστωση ότι η κλασική διχοτόμηση του κόσμου σε *σωματίδια* και *κύματα* —μια διχοτόμηση που φαίνεται λογικά αναπόδραστη μέσα στο κλασικό πλαίσιο— δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Διότι —όπως έδειξαν τα πειραματικά δεδομένα— τα πάντα στη φύση έχουν διπλή υφή: είναι *σωματίδια* και *κύματα ταυτόχρονα*. Έτσι τα όσα συνέβησαν στη φυσική κατά το πρώτο τέταρτο του περασμένου αιώνα μπορούν να παρομοιαστούν με τη διάνοιξη δύο παράλληλων σηράγγων από τις δύο μεριές ενός βουνού. Στη μία μεριά ήταν τα *κύματα* (\equiv ηλεκτρομαγνητικά κύματα) και στην άλλη τα *σωματίδια*. Δηλαδή οι δύο ασυμβίβαστες φυσικές οντότητες της κλασικής φυσικής. Όταν και οι δύο σήραγγες ολοκληρώθηκαν, έγινε πια φανερό ότι τα ασυμβίβαστα μπορούσαν να συμβιβαστούν. Ένα κύμα —το ηλεκτρομαγνητικό κύμα— μπορεί να έχει και σωματιδιακή συμπεριφορά, ενώ ένα σωματίδιο —π.χ., το ηλεκτρόνιο— είναι δυνατόν να συμπεριφέρεται ταυτόχρονα και ως κύμα. Αυτός ο δυϊσμός σωματιδίου-κύματος διατυπώνεται και ποσοτικά μέσω των σχέσεων

$$\blacktriangleright \quad E = hf, \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{A})$$

ή επίσης —λύνοντας ως προς f και λ — μέσω των

$$\blacktriangleright \quad f = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}. \quad (\text{B})$$

Στη μορφή (A) η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού αναφέρεται στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και μας λέει το εξής: ένα ΗΜ κύμα, συχνότητας f και μήκους κύματος λ συμπεριφέρεται *ταυτόχρονα* και ως ένα ρεύμα σωματιδίων, ένα ρεύμα *φωτεινών κβάντων*, που καθένα τους έχει ενέργεια $E = hf$ και ορμή $p = h/\lambda$. Η μορφή (B) αναφέρεται στα σωματίδια —αυτά που θεωρούσαμε πριν μόνο ως σωματίδια (π.χ. το ηλεκτρόνιο, το πρωτόνιο, κ.λπ.)— και μας λέει ότι ένα σωματίδιο ενέργειας E και ορμής p συμπεριφέρεται *ταυτόχρονα* και ως ένα κύμα με συχνότητα $f = E/h$ και μήκος κύματος $\lambda = h/p$. Και στις δύο περιπτώσεις το h είναι μια παγκόσμια σταθερά με αριθμητική τιμή

$$h = 6,626 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$$

και ένα διάσημο όνομα: *σταθερά του Planck*. Σύμφωνα με τα παραπάνω η σταθερά του Planck δεν είναι παρά η *γέφυρα* —ο *συνδετικός κρίκος*— που ενώνει τις δύο κλασικά ασυμβίβαστες όψεις των πραγμάτων: την κυματική με

τη σωματιδιακή. Το h –η σταθερά του Planck– είναι το «σήμα κατατεθέν» της κβαντικής μηχανικής όπως το c –η ταχύτητα του φωτός– είναι το αντίστοιχο «ιερό σύμβολο»(!) της θεωρίας της σχετικότητας.

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα μελετήσουμε εκείνο το φυσικό φαινόμενο –την ακτινοβολία του μέλανος σώματος– μέσα από το οποίο η σταθερά του Planck έκανε για πρώτη φορά την εμφάνισή της στην ιστορία. Για να την επηρεάσει όσο καμία άλλη επιστημονική ανακάλυψη του ανθρώπινου παρελθόντος.

1. Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος

1.1. Περιγραφή του φαινομένου

Αφήνοντας για λίγο στην άκρη την «περίεργη» ονομασία της, ας πούμε αμέσως ότι η ακτινοβολία του μέλανος σώματος δεν είναι τίποτε άλλο από τη *θερμική ακτινοβολία* που εκπέμπουν όλα τα σώματα όταν θερμανθούν. Στην πραγματικότητα, κάθε σώμα με θερμοκρασία έστω και ελάχιστη μεγαλύτερη του απολύτου μηδενός εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, η οποία όμως δεν είναι άμεσα αισθητή από εμάς διότι έχει πολύ χαμηλή ένταση αλλά και μήκη κύματος που πέφτουν κυρίως στην περιοχή των ραδιοφωνικών κυμάτων. Αντίθετα, η θερμική ακτινοβολία των πυρακτωμένων σωμάτων γίνεται αισθητή όχι μόνο ως θερμότητα αλλά και ως πλούσιο ορατό φως με το χαρακτηριστικό κοκκινωπό ή κίτρινο χρώμα.

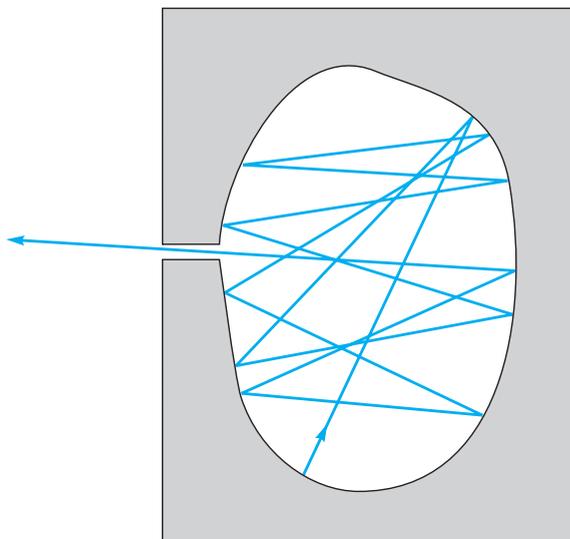
Γιατί όμως η θερμική ακτινοβολία των σωμάτων κρίθηκε από τους κλασικούς φυσικούς ως ενδιαφέρουσα και άξια να γίνει αντικείμενο εντατικής μελέτης; Για έναν λόγο πολύ στοιχειώδη, που ανήκει στη σφαίρα της κοινής ανθρώπινης εμπειρίας. Η εμπειρία είναι πολύ γνωστή. Όλα τα πυρακτωμένα σώματα σε μια ισχυρή εστία φωτιάς έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό χρώμα. Είναι όλα «κοκκινωπά» ή όλα «κίτρινα», ανάλογα με την ένταση της φωτιάς, αλλά σίγουρα ίδια μεταξύ τους. Στην εστία του σιδερά –για όσους έχει τύχει να δουν αυτό το «προϊστορικό» εργαλείο– τα κάρβουνα είναι αδύνατο να διακριθούν οπτικά από το πυρωμένο σίδερο ή οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο που τυχαίνει να βρίσκεται στην ίδια εστία. Στον φούρνο ενός ναυουργείου η εικόνα είναι ακόμα πιο εντυπωσιακή. Από τα πυρίμαχα τοιχώματα του φούρνου έως τα γυάλινα αντικείμενα που εισάγονται εκεί, η εικόνα είναι ταυτόσημη. Όλα είναι «λουσμένα» στο πανομοιότυπο κίτρινο φως που εκπέμπουν. Η οπτική τους διάκριση είναι αδύνατη. Το συμπέρασμα είναι σαφές. *Όλα τα πυρακτωμένα αντικείμενα με την ίδια θερμοκρασία, εκπέμπουν την ίδια ακριβώς ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, ανεξάρτητα από τη χημική τους σύσταση ή άλλες διαφορές στις φυσικές τους ιδιότητες.* Τόσο η ένταση όσο και η χρωματική σύνθεση –δηλαδή η *φασματική κατανομή*– αυτής της ακτινοβολίας φαίνεται να είναι ανεξάρτητη από το υλικό του σώματος και να εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του.

Αν αυτό αποδειχθεί ότι ισχύει όχι μόνο για την ακτινοβολία των πυρακτωμένων σωμάτων αλλά και για την ακτινοβολία που εκπέμπεται από σώματα τυχούσας θερμοκρασίας –και οι πειραματικές μετρήσεις δεν αφήνουν καμία αμφιβολία ότι ισχύει– τότε η θερμική ακτινοβολία έχει έναν αναμφίβολο *παγκόσμιο χαρακτήρα*. Είναι ένα πολύ *ξεχωριστό φαινόμενο*, που δικαιολογεί απόλυτα την προσοχή που του αφιέρωσαν οι πειραματικοί φυσικοί κατά τα τέλη του 19ου αιώνα.

Και ερχόμαστε τώρα στο θέμα της ονομασίας. Γιατί «ακτινοβολία του μέλανος σώματος»; Ο λόγος *δεν είναι τετριμμένος* και έχει να κάνει με την ουσία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας των θερμών σωμάτων, η οποία διακαιούται να χαρακτηριστεί ως *θερμική* μόνο αν είναι πραγματικά *θερμοποιημένη*. Αν, δηλαδή, πριν εκπεμφθεί από το σώμα έχει αλληλεπιδράσει επανειλημμένα με την ύλη του ώστε να έχει έλθει σε θερμική ισορροπία μαζί της. Να έχει αποκτήσει θερμική κατανομή της ενέργειάς της στις διάφορες συχνότητες με τον ίδιο τρόπο που και η ενέργεια ενός αερίου που βρίσκεται σε θερμική ισορροπία κατανέμεται μεταξύ των ατόμων του, με έναν τρόπο –την κατανομή Maxwell-Boltzmann– που υπαγορεύεται από καθαρά θερμοδυναμικούς νόμους: την αρχή της *μέγιστης εντροπίας*.

Στα περισσότερα πυκνά υλικά αυτή η διαδικασία θερμοποίησης είναι αυτονόητη διότι το φως που εκπέμπεται στο εσωτερικό του σώματος από τα άτομά του, πριν φτάσει στην επιφάνειά του και εκπεμφθεί, έχει αλληλεπιδράσει πολλές φορές με άλλα άτομα –αλλάζοντας κατεύθυνση ή συχνότητα κάθε φορά– οπότε η πλήρης θερμοποίησή του είναι σίγουρα εξασφαλισμένη. Γνωρίζουμε όμως επίσης ότι σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων –π.χ., στα ραδιοκύματα ή σε συγκεκριμένες συχνότητες του ορατού φάσματος– ένα σώμα μπορεί να είναι πρακτικά *διαφανές*, οπότε εκεί η θερμοποίηση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα είναι αδύνατη ή, έστω, πολύ ατελής. Η ιδέα του *μέλανος σώματος* ως μιας *χρήσιμης εξιδανίκευσης* αναδύεται τώρα φυσιολογικά από τα παραπάνω. Ένα μαύρο σώμα έχει, εξ ορισμού, την ιδιότητα να απορροφά έντονα όλες τις ορατές ακτινοβολίες που πέφτουν στην επιφάνειά του, άρα θα αλληλεπιδρά ισχυρά μαζί τους και όταν τις εκπέμψει και θα εξασφαλίζει έτσι την πλήρη θερμοποίησή τους. Το ιδεατό μέλαν σώμα πρέπει, βεβαίως, να έχει αυτή την ιδιότητα όχι μόνο στην περιοχή του ορατού φωτός αλλά σε όλη την έκταση του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Γι' αυτό και είναι μια ιδεατή οντότητα χωρίς ακριβές αντίκρισμα στον πραγματικό κόσμο. Όμως –όπως διαπιστώνεται και εμπειρικά με την ομοιοχρωμία όλων των πυρακτωμένων αντικειμένων– τα περισσότερα πυκνά υλικά συμπεριφέρονται με ικανοποιητική ακρίβεια ως μέλανα σώματα τουλάχιστον σε εκείνο το μέρος του φάσματος –ορατό, υπέρυθρο, υπεριώδες– που έχει τη μεγαλύτερη σημασία για τις συνήθεις θερμοκρασίες των σωμάτων. (Από θερμοκρασία περιβάλλοντος έως μια τυπική θερμοκρασία πυρακτώσεως.) Μπορούμε λοιπόν στην πράξη να θεωρούμε ότι η θερμική ακτινοβολία που

εκπέμπεται από τα περισσότερα σώματα σε λογικές θερμοκρασίες είναι ικανοποιητικά θερμοποιημένη ώστε να ανταποκρίνεται στις θεωρητικές προδιαγραφές του ιδανικού προτύπου που αποκαλείται «μέλαν σώμα». Για τις ανάγκες μιας πειραματικής μελέτης με μεγάλες απαιτήσεις ακρίβειας, το ιδανικό πρότυπο μπορεί να προσεγγιστεί ακόμα καλύτερα με το *τέχνασμα της κοιλότητας*. Δηλαδή τη δημιουργία ενός κενού στο εσωτερικό του σώματος με ένα μικρό άνοιγμα στη μία πλευρά του για την έξοδο της ακτινοβολίας που εγκλωβίζεται εκεί. Όπου ο ρόλος του «εγκλωβισμού» είναι, βεβαίως, προφανής. Δίνει την ευκαιρία στην ακτινοβολία που εκπέμπεται από τα εσωτερικά τοιχώματα αυτού του μικρού «φούρνου» να σκεδαστεί πολλές φορές πάνω τους ώστε, όταν φτάσει πια να εξέλθει από το άνοιγμά του, η θερμοποίησή της να είναι σχεδόν απόλυτη (Σχ. 1.1).



ΣΧΗΜΑ 1.1: Μια κοιλότητα μέλανος σώματος. Πριν εξέλθει από το άνοιγμα της κοιλότητας, μια «φωτεινή ακτίνα» που εκπέμπεται από ένα σημείο των τοιχωμάτων της, υφίσταται επανειλημμένες «ανακλάσεις» πάνω σε αυτά –στην πραγματικότητα, απορροφήσεις και επανεκπομπές– οπότε η ακτινοβολία που τελικά εξέρχεται από το άνοιγμα αυτού του μικρού «φούρνου» είναι πλήρως θερμοποιημένη. Θα έχει την ιδεατή κατανομή που προβλέπεται για ένα μέλαν σώμα.

Για την ποσοτική περιγραφή της θερμικής ακτινοβολίας, η ποσότητα που χρειαζόμαστε αποκαλείται *φασματική ένταση* –σύμβολο J – και ορίζεται ως

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S \cdot \Delta f} \equiv \frac{\Delta P}{\Delta S \cdot \Delta f}, \quad (1.1)$$

δηλαδή ως η *εκπεμπόμενη ισχύς*, ΔP , ανά μονάδα επιφανείας του σώματος και ανά μονάδα διαστήματος συχνότητας. Η φασματική ένταση θα είναι μια συνάρτηση της μορφής $J = J(f, T)$ που οι τιμές της για διάφορα f θα μας δίνουν την ένταση της ακτινοβολίας στη γειτονιά των αντίστοιχων συχνοτήτων. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $J(f, T)$ θα μας δίνει τη ζητούμενη φασματική κατανομή για την εκάστοτε θερμοκρασία T . Ο όρος *ένταση* (ή *ολική ένταση*) –σύμβολο I – αναφέρεται στην *ολική ακτινοβολούμενη ισχύ ανά μονάδα επιφανείας του σώματος* –δηλαδή $I = \Delta P / \Delta S$ – και προκύπτει, βεβαίως, από τη φασματική ένταση J μέσω του τύπου

$$I = \int_0^{\infty} J(f, T) df, \quad (1.2)$$

δηλαδή ολοκληρώνοντάς την σε όλο το φάσμα συχνοτήτων. Από πλευράς μονάδων θα είναι

$$[J] = \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2 \cdot \text{Hz}}, \quad [I] = \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$

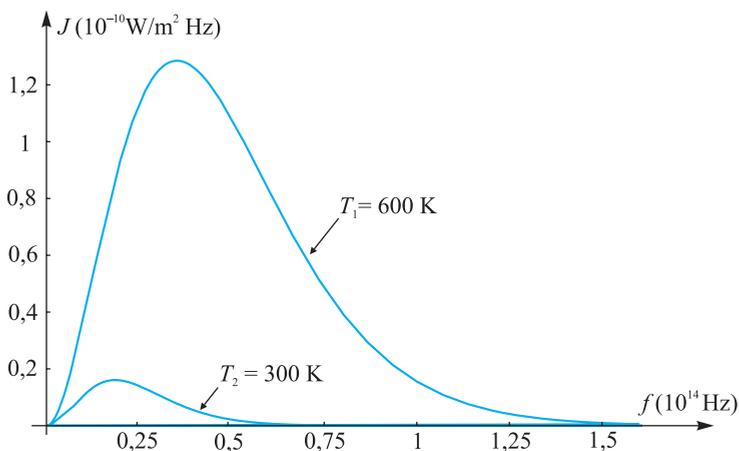
όπου ειδικά εδώ προτιμήθηκε το σύστημα mks ενώ σε όλο το υπόλοιπο βιβλίο –με «σημειακές» εξαιρέσεις– θα προτιμηθεί το σύστημα cgs για λόγους που θα εξηγηθούν αργότερα. Ο ορισμός (1.1) ισχύει, βεβαίως, και για το μοντέλο της κοιλότητας με ΔS το εμβαδόν του ανοίγματός της, ενώ θα πρέπει να τονιστεί ταυτόχρονα ότι η ένταση που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι η ίδια με εκείνη που αντιστοιχεί σε ένα οποιοδήποτε σημείο των εσωτερικών τοιχωμάτων της. Διότι, στην κατάσταση ισορροπίας, η ακτινοβολία που «βγαίνει» από το άνοιγμα της κοιλότητας είναι ταυτόσημη με αυτήν που εκπέμπεται από τα τοιχώματά της.

1.2. Οι πειραματικοί νόμοι

Τα αποτελέσματα της λεπτομερούς πειραματικής μελέτης της θερμικής ακτινοβολίας των σωμάτων –μιας μελέτης που ήταν ήδη πλήρης από τα τέλη του 19ου αιώνα– μπορούν να συνοψιστούν στους ακόλουθους τέσσερις πειραματικούς νόμους:

1. Ο νόμος της παγκοσμιότητας του φάσματος

Στον βαθμό που οι προϋποθέσεις της πλήρους θερμοποίησης ισχύουν, όλα τα σώματα με την ίδια θερμοκρασία εκπέμπουν την ίδια θερμική ακτινοβολία, ανεξάρτητα από την υλική τους σύσταση. Για κάθε δεδομένη θερμοκρασία, η φασματική κατανομή έχει τη χαρακτηριστική μορφή των καμπυλών του Σχήματος 1.2 και η μορφή αυτή –για κάθε δεδομένο T – είναι η ίδια για όλα τα σώματα. Είναι μια *παγκόσμια καμπύλη*.



ΣΧΗΜΑ 1.2: Οι καμπύλες της φασματικής κατανομής της θερμικής ακτινοβολίας για δύο δεδομένες θερμοκρασίες ($T_1 = 600 \text{ K}$ και $T_2 = 300 \text{ K}$).

2. Ο νόμος των Stefan-Boltzmann

Η ολική ένταση της θερμικής ακτινοβολίας ενός σώματος είναι ανάλογη με την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας του. Δηλαδή

$$\blacktriangleright \quad I = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

όπου σ μια παγκόσμια σταθερά –γνωστή ως σταθερά των Stefan-Boltzmann– ανεξάρτητη από την υλική σύσταση του σώματος και με αριθμητική τιμή

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (\text{mks})$$

όπου, βέβαια, $\text{W} \equiv \text{Watt}$ και $\text{K} \equiv \text{Kelvin}$.

3. Ο νόμος της μετατόπισης, του Wien

Το μήκος κύματος μέγιστης εκπομπής –δηλαδή το μήκος κύματος στο οποίο η ακτινοβολία γίνεται μέγιστη– μετατοπίζεται αντιστρόφως ανάλογα με τη θερμοκρασία. Δηλαδή

$$\blacktriangleright \quad \lambda_{\max}(\text{cm}) = \frac{0,29}{T(\text{K})} \simeq \frac{0,3}{T}, \quad (1.4)$$

όπου εδώ προτιμήσαμε να εκφράσουμε το μήκος κύματος σε εκατοστά, ώστε να αποφευχθεί ένας πολύ μικρός συντελεστής στον σχετικό τύπο. (Στο σύστημα mks θα ήταν $\lambda_{\max} \simeq 0,003/T$.)

4. Ο ασυμπτωτικός νόμος του Wien

Στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων τα πειραματικά δεδομένα μπορούν να περιγραφούν πολύ καλά από τον ακόλουθο εμπειρικό τύπο

$$J_{\text{Wien}} \sim f^3 e^{-\alpha f/T} \quad (f \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

που είναι γνωστός ως ο *ασυμπτωτικός νόμος του Wien*.

Ο γενικός εμπειρικός τύπος του Planck

Εντυπωσιασμένος από την παγκοσμιότητα της θερμικής ακτινοβολίας ο Planck προσπάθησε από πολύ νωρίς να «επινοήσει» έναν γενικό εμπειρικό τύπο που να αναπαράγει τα πειραματικά δεδομένα για κάθε συχνότητα και θερμοκρασία και να περιλαμβάνει, βεβαίως, τους νόμους των Stefan-Boltzmann και Wien (και ειδικότερα τον *ασυμπτωτικό νόμο του Wien*) ως ειδικές του περιπτώσεις. Η αναζήτηση αυτή ευοδώθηκε τελικά τον Δεκέμβριο του 1899, όταν ο Planck παρουσίασε στην Ακαδημία του Βερολίνου τον τύπο

$$\blacktriangleright \quad J(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1}, \quad (1.6)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός, k η σταθερά του Boltzmann και h μια *νέα παγκόσμια σταθερά*, γνωστή σήμερα ως *σταθερά του Planck*. Δεδομένου ότι η μεταβλητή hf/kT στο εκθετικό του τύπου (1.6) πρέπει να είναι *αδιάστατη*^(*) και ότι ο παρονομαστής της, kT , έχει διαστάσεις ενέργειας, το h θα έχει υποχρεωτικά διαστάσεις *ενέργειας επί χρόνο*, δηλαδή διαστάσεις *δράσης*, όπως έχει επικρατήσει να ονομάζεται στη φυσική αυτό το γινόμενο (ενέργεια \times χρόνος). Προκειμένου να συμφωνήσει ο τύπος (1.6) με την πειραματική καμπύλη, ή με τους επιμέρους εμπειρικούς νόμους, ο Planck επέλεξε για τη σταθερά του την τιμή

$$\blacktriangleright \quad \begin{aligned} h &= 6,62 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} && (\text{cgs}) \\ &= 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} && (\text{mks}) \end{aligned}$$

με την οποία η συμφωνία ήταν πράγματι εντυπωσιακή. Ένας τρόπος να πειστούμε γι' αυτό είναι το πρόβλημα που ακολουθεί:

^(*) Διαφορετικά, οι επιμέρους όροι του αναπτύγματος

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (z = hf/kT)$$

θα είχαν διαφορετική φυσική διάσταση, που είναι, βεβαίως, άτοπο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Δείξτε ότι ο νόμος των Stefan - Boltzmann και η αριθμητική τιμή της σχετικής σταθεράς σ αποτελούν αναγκαστική συνέπεια του γενικού εμπειρικού νόμου του Planck και της εκλεγείσας τιμής για το h .

Λύση: Θα είναι

$$I = \int_0^{\infty} J(f, T) df = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df$$

οπότε με την (προφανή) αλλαγή μεταβλητής

$$x = \frac{hf}{kT} \Rightarrow f = \frac{kT}{h} x \Rightarrow df = \frac{kT}{h} dx$$

θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{(kT/h)^3 x^3}{e^x - 1} \left(\frac{kT}{h}\right) dx \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

όπου α η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\infty} (x^3/(e^x - 1)) dx$ η οποία μπορεί να υπολογιστεί αφού το ολοκλήρωμα υπάρχει. (Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = x^3/(e^x - 1)$ έχει τη χαρακτηριστική μορφή του Σχήματος 1.2 και, επομένως, το συνολικό εμβαδόν της είναι πεπερασμένο.)

Όποια όμως και αν είναι η τιμή του α , ο νόμος της τέταρτης δύναμης είναι ήδη φανερός από την (1), ενώ θα έχουμε ταυτόχρονα για την τιμή του σ την έκφραση $\sigma = 2\pi\alpha k^4/c^2 h^3$, που παίρνει τελικά τη μορφή

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3}, \quad (2)$$

αν αντικαταστήσουμε στην (1) την τιμή του α ($= \pi^4/15$), όπως την παίρνουμε από ένα βιβλίο ολοκληρωμάτων ή –πολύ καλύτερα– από ένα πρόγραμμα συμβολικών μαθηματικών.

Με $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $c = 3 \times 10^8$ m/s και $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J·s η (2) δίνει πράγματι την εμπειρική τιμή του σ , που αναφέραμε προηγουμένως ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W·m⁻²·K⁻⁴).

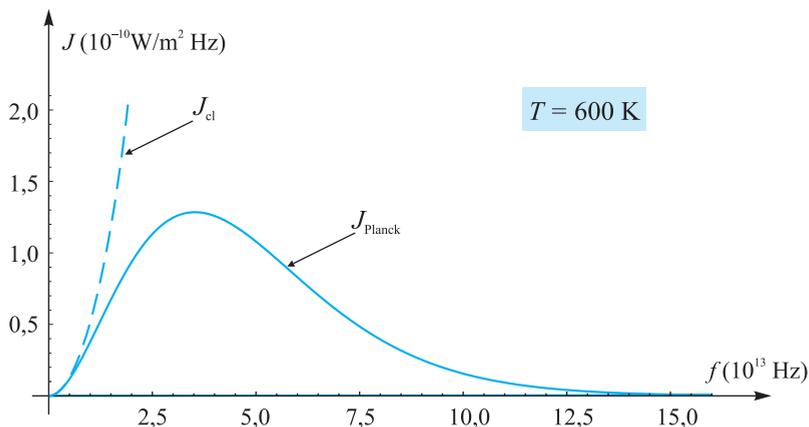
1.3. Απόπειρα κλασικής ερμηνείας

Λόγω της θεμελιώδους σημασίας που της προσέδιδε η παγκοσμιότητά της, η φασματική κατανομή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος ήταν από την πρώτη στιγμή μια αυτονόητη πρόκληση για την κλασική φυσική και ειδικότερα για την κλασική ηλεκτροδυναμική και τη στατιστική μηχανική στο πλαίσιο των οποίων θα έπρεπε να είναι δυνατή η ερμηνεία της.

Το έργο αυτό ανέλαβαν οι Rayleigh και Jeans περί τα τέλη του 19ου αιώνα και κατέληξαν σύντομα στον απλούστατο τύπο

►
$$J_{cl}(f, T) = \frac{2\pi}{c^2} f^2 kT \quad (1.7)$$

ο οποίος όμως βρίσκεται σε πλήρη διάσταση με τα πειραματικά δεδομένα, όπως φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 1.3.



ΣΧΗΜΑ 1.3: Σύγκριση της κλασικής πρόβλεψης για τη φασματική κατανομή της θερμικής ακτινοβολίας, με τον εμπειρικό τύπο του Planck για $T = 600 \text{ K}$. Ο κλασικός τύπος των Rayleigh-Jeans συμφωνεί με τον τύπο του Planck μόνο στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ στις μεγάλες συχνότητες οδηγεί στο απαράδεκτο συμπέρασμα ότι η ακτινοβολία αυξάνεται απεριόριστα. Η συμπεριφορά αυτή για μεγάλα f –γνωστή ως υπερίωδης καταστροφή– συμπυκνώνει όχι απλώς την αδυναμία της κλασικής φυσικής να ερμηνεύσει τη θερμική ακτινοβολία των σωμάτων αλλά την πλήρη χρεωκοπία της σε αυτό το θέμα.

Δεν θα επιχειρήσουμε να αναπαραγάγουμε την απόδειξη του τύπου (1.7), διότι προϋποθέτει γνώσεις στατιστικής μηχανικής και ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας που δεν θεωρούμε αναγκαίο να τις κατέχει ο αναγνώστης στο παρόν στάδιο ανάπτυξης του θέματος. (Σχετικές υποδείξεις θα βρει όμως στο σχετικό Συμπλήρωμα θεωρίας (Πρόβλημα B.18) στο τέλος του κεφαλαίου.) Μπορούμε εντούτοις να φτάσουμε στο αποτέλεσμα (1.7) –με απροσδιοριστία μιας αριθμητικής σταθεράς– ακολουθώντας τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης. Στη γενικότητά της η ιδέα της μεθόδου είναι πολύ απλή. Έστω D ένα φυσικό μέγεθος για το οποίο γνωρίζουμε ότι εξαρτάται μόνο από τρία άλλα· ας τα πούμε A, B και C . Γνωρίζουμε δηλαδή ότι θα είναι

$$D = F(A, B, C).$$

Το «θεμελιώδες θεώρημα» της διαστατικής ανάλυσης λέει τώρα το εξής: Η συνάρτηση $F(A, B, C)$ θα έχει υποχρεωτικά τη μορφή

$$F(A, B, C) = \lambda A^\alpha B^\beta C^\gamma, \quad (1.8)$$

όπου λ μια αδιάστατη αριθμητική σταθερά, και α, β, γ κατάλληλοι εκθέτες που προσδιορίζονται μονοσήμαντα από το σύστημα των τριών εξισώσεων που εκφράζουν τη διαστατική ομοιογένεια των δύο μελών της εξίσωσης

$$D = \lambda A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

ως προς μήκος, μάζα και χρόνο. Δηλαδή τα τρία βασικά φυσικά μεγέθη $-L, M, T-$ που απαιτούνται για τον πλήρη διαστατικό προσδιορισμό κάθε άλλου φυσικού μεγέθους. Και ακριβώς επειδή τα βασικά φυσικά μεγέθη είναι τρία, γι' αυτό και η εξάρτηση ενός φυσικού μεγέθους μόνο από τρία άλλα $-$ δηλαδή μια σχέση της μορφής $D = F(A, B, C)-$ οδηγεί στον μονοσήμαντο προσδιορισμό του με απροσδιοριστία μόνο μιας αδιάστατης πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Έτσι φτάνουμε στην ακόλουθη τελική διατύπωση του σχετικού θεωρήματος:

Το θεμελιώδες θεώρημα της διαστατικής ανάλυσης: Αν ένα φυσικό μέγεθος εξαρτάται μόνο από τρία άλλα, η εξάρτηση $-$ με απροσδιοριστία μιας αριθμητικής σταθεράς $-$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από καθαρά διαστατικές απαιτήσεις.

Η εφαρμογή των παραπάνω στην περίπτωση της φασματικής κατανομής του μέλανος σώματος είναι άμεση. Η πρώτη βασική διαπίστωση είναι ότι, στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής, η ζητούμενη συνάρτηση J θα έχει αναγκαστικά τη μορφή

$$J = F(f, T, c, k), \quad (1.9)$$

θα εξαρτάται δηλαδή αφ' ενός από τις μεταβλητές παραμέτρους του προβλήματος $-$ συχνότητα και θερμοκρασία $-$ και αφ' ετέρου από τις θεμελιώδεις σταθερές των φυσικών νόμων που υπεισέρχονται στην περιγραφή του φαινομένου. Δηλαδή εδώ, της ταχύτητας c του φωτός (αφού πρόκειται προφανώς για ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο) και της σταθεράς k του Boltzmann, αφού πρόκειται επίσης για θερμοδυναμικό φαινόμενο. Το γεγονός ότι στον τύπο (1.9) δεν υπεισέρχεται καμία φυσική σταθερά που σχετίζεται με την ατομική δομή του εκπέμποντος υλικού ή τις οποιεσδήποτε φυσικοχημικές του ιδιότητες, δεν είναι, βεβαίως, τυχαίο. Είναι η αναγκαστική συνέπεια του θεμελιώδους εμπειρικού γεγονότος ότι η θερμική ακτινοβολία των σωμάτων έχει έναν παγκόσμιο χαρακτήρα. Είναι η ίδια για όλα τα σώματα και ο ρόλος του εκάστοτε υλικού περιορίζεται απλώς στη θερμοποίησή της.

Δυστυχώς, το θεμελιώδες θεώρημα δεν είναι ακόμα εφαρμόσιμο για τον τύπο (1.9), αφού το ζητούμενο μέγεθος J δεν εξαρτάται μόνο από τρία άλλα,

όπως απαιτεί το θεώρημα, αλλά από τέσσερα. Αυτό όμως είναι φαινομενικό, διότι στους φυσικούς τύπους με θερμοδυναμικό περιεχόμενο τα μεγέθη T και k ουδέποτε εμφανίζονται χωριστά, αλλά πάντα ως γινόμενο kT , αφού όλη η θερμοδυναμική έχει ως αφητηρία της τον τύπο του Boltzmann, $P \sim e^{-E/kT}$, όπου τα k και T εμφανίζονται πράγματι «ζευγαρωμένα» υπό τη μορφή του βασικού γινομένου kT .^(*) Θα είναι λοιπόν τελικά

$$J = F(f, kT, c)$$

και επομένως –σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της διαστατικής ανάλυσης– θα έχουμε

$$J = f^\alpha (kT)^\beta c^\gamma, \quad (1.10)$$

όπου παραλείψαμε την αριθμητική σταθερά λ , αφού αυτή μπορεί πάντα να εισαχθεί εκ των υστέρων. Για τον υπολογισμό των άγνωστων εκθετών α, β και γ χρειαζόμαστε τις φυσικές διαστάσεις L, M, T όλων των ποσοτήτων που εμφανίζονται στην (1.10). Θα είναι

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S \cdot \Delta f} \Rightarrow [J] = \frac{[\Delta E]}{[\Delta t][\Delta S][\Delta f]} = \frac{M(L/T)^2}{T \cdot L^2 \cdot T^{-1}} = M T^{-2}$$

$$[f] = T^{-1}, \quad [kT] = [E] = M L^2 T^{-2}, \quad [c] = L T^{-1},$$

οπότε η διαστατική ομοιογένεια της (1.10) απαιτεί να είναι

$$\begin{aligned} M T^{-2} &\equiv L^0 M T^{-2} = (T^{-1})^\alpha (M L^2 T^{-2})^\beta (L T^{-1})^\gamma \\ &\Rightarrow L^0 M T^{-2} = L^{2\beta+\gamma} M^\beta T^{-\alpha-2\beta-\gamma}, \end{aligned}$$

οπότε –εξισώνοντας τους εκθέτες των L, M, T στα δύο μέλη– θα έχουμε

$$0 = 2\beta + \gamma, \quad 1 = \beta, \quad -2 = -\alpha - 2\beta - \gamma,$$

από όπου προκύπτουν αμέσως οι τιμές

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2.$$

Έτσι ο ζητούμενος τύπος θα έχει υποχρεωτικά τη μορφή

$$J \sim \frac{f^2(kT)}{c^2},$$

^(*) Στην πραγματικότητα, αν είχε γίνει αντιληπτό εξ αρχής ότι η θερμοκρασία ενός σώματος αντιπροσωπεύει τη μέση κινητική ενέργεια των ατόμων ή των μορίων του, τότε το T θα μετρούταν κατευθείαν σε ενεργειακές μονάδες (erg, Joule, eV ή οτιδήποτε άλλο) και δεν θα υπήρχε καθόλου ανάγκη για μια σταθερά σαν το k που ο μοναδικός της ρόλος είναι να μετατρέπει τη θερμοκρασία (μετρημένη σε βαθμούς) σε ισοδύναμες ενεργειακές μονάδες. Με άλλα λόγια, η σταθερά k μπορούσε άνετα να απουσιάζει από τη φυσική.

που δεν είναι παρά ο τύπος των Rayleigh - Jeans με την αναμενόμενη απροσδιοριστία μιας αριθμητικής σταθεράς.

Σημειώστε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα $-J \sim (kT)f^2/c^2$ - μπορούμε να καταλήξουμε και με έναν ευκολότερο τρόπο αν σκεφτούμε ότι το J έχει διαστάσεις E/L^2 και θέσουμε $E \sim kT$ και $L \sim \lambda = c/f$, που είναι οι μοναδικοί συνδυασμοί των kT , c και f με διαστάσεις ενέργειας και μήκους αντίστοιχα.

Από φυσικής πλευράς το συμπέρασμα είναι δραματικό. Έχοντας αποδείξει τον τύπο των Rayleigh - Jeans (χωρίς, βεβαίως, τον αριθμητικό συντελεστή του) με καθαρά διαστατικά επιχειρήματα είμαστε υποχρεωμένοι να συμπεράνουμε ότι η κλασική φυσική δεν έχει κανένα απολύτως περιθώριο να αποφύγει τις καταστροφικές συνέπειες που ο τύπος αυτός εμπεριέχει. Παραδείγματος χάριν, την *υπεριώδη καταστροφή*. Δηλαδή την ακατάσχετη αύξηση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας στις υψηλές συχνότητες, η οποία οδηγεί -μεταξύ άλλων- και στο παράλογο συμπέρασμα ότι η ολική ενέργεια που εκπέμπεται *ανά δευτερόλεπτο* από ένα θερμό σώμα είναι . . . άπειρη!

Δραματοποιώντας λίγο τα πράγματα μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η ομοιοχρωμία και μόνο των πυρακτωμένων αντικειμένων -αυτή η κοινή ανθρώπινη εμπειρία- αρκεί για να καταδείξει τη χρεωκοπία της κλασικής φυσικής στο πρόβλημα της θερμικής ακτινοβολίας. Διότι η ομοιοχρωμία αυτή δεν σημαίνει τίποτε άλλο παρά ότι η ακτινοβολία αυτή είναι ανεξάρτητη από το υλικό του σώματος, οπότε θα ισχύουν υποχρεωτικά οι διαστατικοί συλλογισμοί που ακολουθήσαμε πριν και μας οδήγησαν στον τύπο $J \sim f^2(kT)/c^2$ και συνεπώς στα αδιέξοδα που αυτός εμπεριέχει.

Είναι φανερό ότι προς τα τέλη του 19ου αιώνα η φυσική καθόταν κυριολεκτικά πάνω σε . . . αναμμένα κάρβουνα.

1.4. Κβαντική ερμηνεία: Η υπόθεση του Planck

Έξι χρόνια πάλενα με το πρόβλημα της θερμικής ισορροπίας ύλης και ακτινοβολίας χωρίς επιτυχία. Ήξερα ότι αυτό το πρόβλημα είχε θεμελιώδη σημασία για τη φυσική. Ήξερα τον τύπο που αναπαράγει την ενεργειακή κατανομή του φάσματος.

Μια θεωρητική ερμηνεία έπρεπε να βρεθεί, με κάθε κόστος, οσοδήποτε υψηλό.

M. PLANCK

Έχοντας στη διάθεσή του έναν ακριβή εμπειρικό τύπο για τη φασματική ένταση J και γνωρίζοντας την πλήρη αδυναμία της κλασικής φυσικής να τον ερμηνεύσει, το αναγκαίο επόμενο βήμα για τον Planck ήταν να αναζητήσει ο ίδιος την κατάλληλη θεωρητική του ερμηνεία. Αν και το επιχείρημα που θα παρουσιάσουμε εδώ δεν είναι εκείνο που χρησιμοποίησε ο Planck στην αναζήτησή του, δεν είναι όμως και τελείως διαφορετικό από το δικό του. Η ιδέα είναι να εξετάσουμε προσεκτικά τον τύπο

$$J = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} \quad (1.11)$$

μήπως και «φανεί» από τη μορφή του η κατάλληλη θεωρητική παραδοχή που θα μπορούσε να τον εξηγήσει. Ας εξετάσουμε ειδικότερα τον παράγοντα

$$\frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad (1.12)$$

στον οποίο το εκθετικό $\exp(hf/kT)$ θυμίζει αμέσως το εκθετικό Boltzmann, $\exp(-E/kT)$, αλλά με αντίθετο πρόσημο. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή της (1.12) με το εκθετικό $\exp(-hf/kT)$, θα πάροουμε

$$\frac{e^{-hf/kT}}{1 - e^{-hf/kT}} \quad (1.13)$$

και δεδομένου ότι

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1),$$

η έκφραση (1.13) θα γράφεται επίσης ως

$$\begin{aligned} e^{-hf/kT} (1 + e^{-hf/kT} + e^{-2hf/kT} + \dots) = \\ e^{-hf/kT} + e^{-2hf/kT} + e^{-3hf/kT} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nhf/kT}, \end{aligned}$$

δηλαδή ως ένα άθροισμα εκθετικών τύπου Boltzmann $-\exp(-E_n/kT)$ με ενέργειες

$$E_n = nhf,$$

που δεν είναι παρά τα ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας

▶
$$\epsilon = hf,$$

όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα της ακτινοβολίας.

Ο ίδιος ο εμπειρικός τύπος του Planck μας υποβάλλει λοιπόν την ιδέα ότι μια πιθανή παραδοχή που μπορεί να τον εξηγήσει είναι η εξής:

Παραδοχή του Planck: Η ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα «μέλαν σώμα» είναι κβαντωμένη. Οι μόνες επιτρεπόμενες τιμές είναι τα ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας $\epsilon = hf$, όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα της ακτινοβολίας.

Για τους λόγους που εκθέσαμε και προηγουμένως δεν θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε εδώ ότι η παραδοχή του Planck όντως εξηγεί τον ομώνυμο

τύπο, αλλά θα παραπέμψουμε τον αναγνώστη στο *Συμπλήρωμα θεωρίας* (B.18) στο τέλος του κεφαλαίου, όπου υπάρχουν αρκετές υποδείξεις για να καλύψει μόνος του αυτό το κενό. Αντί γι' αυτό θα υποβάλουμε την υπόθεση του Planck σε έναν αυτονόητο έλεγχο. Ας τον διατυπώσουμε υπό μορφή προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: Αφού εξηγήσετε γιατί στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων η κατανομή του Planck πρέπει να συμπίπτει με την αντίστοιχη κλασική, βεβαιωθείτε κατόπιν ότι αυτό πράγματι συμβαίνει.

Λύση: Από τον τύπο $\epsilon = hf$ είναι αμέσως φανερό ότι στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων ($f \rightarrow 0$) η ενέργεια του «φωτεινού κβάντου» θα γίνεται αμελητέα και επομένως εκεί η κβαντική φύση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας δεν θα είναι πειραματικά ανιχνεύσιμη. Σε αυτή την περιοχή θα πρέπει να ισχύει λοιπόν η κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία οπότε και ο τύπος του Planck θα πρέπει να αναπαράγει το αντίστοιχο κλασικό αποτέλεσμα (τύπος των Rayleigh-Jeans). Πράγματι, δεδομένου ότι για f πολύ μικρό –για την ακρίβεια για $hf \ll kT$ – θα είναι $hf/kT \ll 1$, το ανάπτυγμα του εκθετικού

$$e^{hf/kT} = 1 + \frac{hf}{kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{hf}{kT}\right)^2 + \dots$$

θα μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από τους δύο πρώτους όρους του –δηλαδή $\exp(hf/kT) \simeq 1 + (hf/kT)$ – οπότε η σχετική αντικατάσταση στον τύπο (1.11) του Planck θα δώσει

$$J \simeq \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{(hf/kT)} = \frac{2\pi}{c^2} kT f^2,$$

που είναι ακριβώς ο κλασικός τύπος των Rayleigh και Jeans.

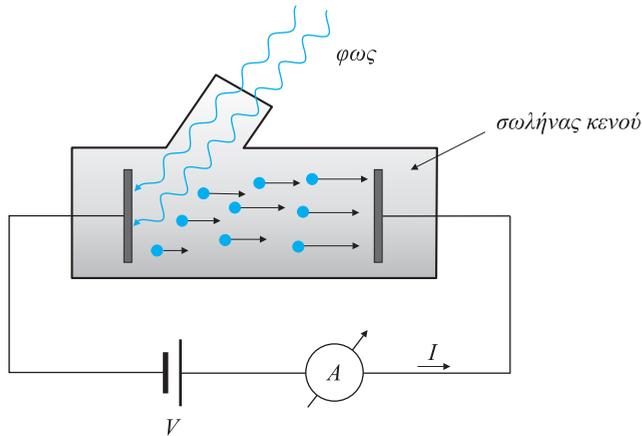
2. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

2.1. Περιγραφή του φαινομένου

Με το όνομα «φωτοηλεκτρικό φαινόμενο» χαρακτηρίζουμε την εκπομπή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο η οποία προκαλείται από την πρόσπτωση ορατής ή υπεριώδους ακτινοβολίας στην επιφάνειά του. Στην πραγματικότητα ο όρος χρησιμοποιείται σήμερα με ένα πολύ ευρύτερο περιεχόμενο. Δηλώνει την απόσπαση ηλεκτρονίων από οποιοδήποτε φυσικό σύστημα –άτομο, μόριο ή στερεό– στο οποίο τα ηλεκτρόνια αυτά είναι δέσμια.

Μια σχηματοποιημένη πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φαινομένου θα είναι όπως στο σχήμα 1.4.

Οι παράμετροι που μπορούν να μεταβληθούν στο πείραμα είναι η *συχνότητα* και η *ένταση* της φωτεινής δέσμης και η *τάση* της πηγής. Το μέγεθος



ΣΧΗΜΑ 1.4: Σχηματοποιημένη πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Η φωτεινή δέσμη «πέφτει» σε μια φωτοευαίσθητη κάθοδο και τα αποσπώμενα ηλεκτρόνια συλλέγονται από την άνοδο και παράγουν το φωτοηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

που μετρούμε είναι η ένταση I του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Αντιστρέφοντας την πολικότητα της πηγής μέχρι την τιμή V_0 , όπου το φωτοηλεκτρικό ρεύμα σταματά τελείως (τάση αποκοπής), μπορούμε να μετρήσουμε επίσης και την κινητική ενέργεια των αποσπώμενων από την κάθοδο ηλεκτρονίων. Για την τελευταία αυτή μέτρηση θα είναι συγκεκριμένα

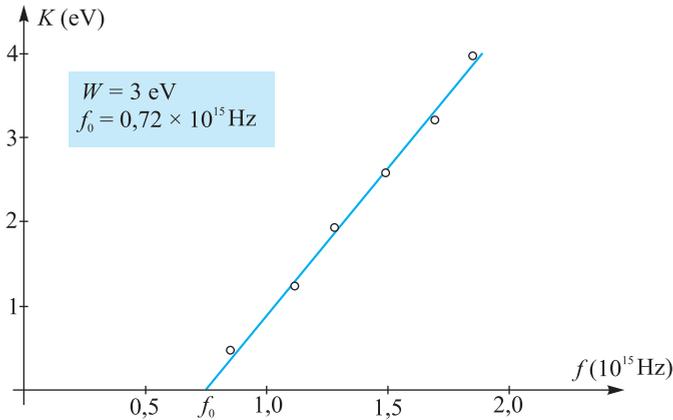
$$K = eV_0,$$

αφού το έργο eV_0 που πραγματοποιεί το ηλεκτρικό πεδίο από την κάθοδο έως την άνοδο θα πρέπει να ισούται με την κινητική ενέργεια K του ηλεκτρονίου που αναλώθηκε κατά τη διαδρομή. (V_0 είναι, βεβαίως, το δυναμικό αποκοπής.)

2.2. Οι πειραματικοί νόμοι

Με αφετηρία την πρώτη παρατήρηση από τον Hertz της εξαγωγής ηλεκτρονίων από μέταλλα με πρόσπτωση υπεριώδους φωτός, ακολούθησε μια εντατική μελέτη του φαινομένου –με καθοριστική τη συμβολή του Lenard στις αρχές του 1900– που οδήγησε τελικά στη διατύπωση των ακόλουθων πειραματικών νόμων:

A. Η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος αυξάνεται ανάλογα με την ένταση της φωτεινής δέσμης.



ΣΧΗΜΑ 1.5: Πέραν της οριακής συχνότητας f_0 η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων αυξάνεται γραμμικά με τη συχνότητα της ακτινοβολίας. (Πειραματικός νόμος.)

- Β.** Φωτοηλεκτρικό ρεύμα εμφανίζεται μόνο όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από μια οριακή τιμή $f_0 = f_{\min}$, χαρακτηριστική του υλικού της φωτοκάθοδου. Αν είναι $f < f_0$ δεν θα υπάρξει φωτοηλεκτρικό ρεύμα, οποιαδήποτε και αν είναι η ένταση της φωτεινής δέσμης.
- Γ.** Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων (για $f > f_0$) δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής δέσμης αλλά μόνο από τη συχνότητά της. Επιπλέον η εξάρτηση του K από το f έχει τη γραμμική μορφή του Σχήματος 1.5.

Με τεχνικές που αναπτύχθηκαν λίγο αργότερα έγινε επίσης δυνατό να μετρηθεί και η ενδεχόμενη *χρονική υστέρηση* μεταξύ της πρόσπτωσης του φωτός στην κάθοδο και της εμφάνισης του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Και το πειραματικό αποτέλεσμα ήταν ο ακόλουθος *τέταρτος νόμος*.

- Δ.** Το φωτοηλεκτρικό ρεύμα εμφανίζεται σχεδόν ταυτόχρονα με την πρόσπτωση της φωτεινής δέσμης στη φωτοκάθοδο. Αν υπάρχει *χρονική υστέρηση*, αυτή θα είναι μικρότερη από ένα νανοδευτερόλεπτο ($1 \text{ nsec} = 10^{-9} \text{ sec}$).

2.3. Απόπειρα κλασικής ερμηνείας

Σημειώστε κατ' αρχάς ότι σε όλες τις εκδοχές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου (επαναλαμβάνουμε ότι *φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι η απόσπαση ηλεκτρονίων από οποιοδήποτε σύστημα στο οποίο είναι δέσμη*) απαιτείται να

δοθεί στο ηλεκτρόνιο μια ελάχιστη χαρακτηριστική ενέργεια προκειμένου να επιτευχθεί η απομάκρυνσή του. Στα μέταλλα αυτή η ενέργεια είναι γνωστή ως *έργο εξαγωγής* –και συμβολίζεται με W –, στα άτομα αποκαλείται *έργο ionτισμού* –και συμβολίζεται με W_1 ή E_1 – και ούτω καθ' εξής. Και το ερώτημα είναι: πώς προσλαμβάνει το ηλεκτρόνιο την αναγκαία για την εξαγωγή του ενέργεια; Στην κλασική φυσική ο μηχανισμός είναι πολύ απλός. Η προσπίπτουσα ακτινοβολία είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο θα ασκεί στα ηλεκτρόνια του μετάλλου μια δύναμη $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ που θα τα επιταχύνει αυξάνοντας την κινητική τους ενέργεια. Και όταν η ενέργεια αυτή ξεπεράσει το έργο εξαγωγής του μετάλλου, τα ηλεκτρόνια θα αποσπαστούν από αυτό. Ας δούμε λοιπόν πρώτα αν αυτός ο κλασικός μηχανισμός μπορεί να εξηγήσει τους νόμους του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

- A.** Αύξηση της φωτεινής έντασης στην κλασική θεωρία σημαίνει αύξηση της έντασης του ηλεκτρικού της πεδίου. Όμως ένα ισχυρότερο ηλεκτρικό πεδίο ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στα ηλεκτρόνια του μετάλλου και επομένως μπορεί να τα αποσπάσει ευκολότερα, αυξάνοντας έτσι τον ρυθμό εξαγωγής τους, δηλαδή το φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Κατά συνέπεια η ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι σε θέση να εξηγήσει κατ' αρχήν τον πρώτο νόμο του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.
- B.** Συνεχίζοντας το κλασικό σκεπτικό, βλέπουμε αμέσως ότι η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια αυξάνεται παράλληλα με την ένταση του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή παράλληλα με την ένταση της φωτεινής δέσμης. Αντίθετα, η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν φαίνεται να παίζει ουσιώδη ρόλο. Επομένως, όποια και αν είναι η τιμή της συχνότητας, μπορούμε πάντα, αυξάνοντας κατάλληλα την ένταση της δέσμης –δηλαδή την ένταση του ηλεκτρικού της πεδίου–, να πετύχουμε φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Στο πλαίσιο της κλασικής θεωρίας οριακή συχνότητα δεν υπάρχει. Ο δεύτερος νόμος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου –δηλαδή η ύπαρξη *κατωφλίου συχνότητας*– είναι τελείως ανεξήγητος από κλασική σκοπιά.
- Γ.** Για τον ίδιο όπως και πριν λόγο, η κινητική ενέργεια των εξαγόμενων ηλεκτρονίων θα έπρεπε να προσδιορίζεται κυρίως από την ένταση της δέσμης και η συχνότητά της να παίζει δευτερεύοντα ρόλο. Εντούτοις ο τρίτος πειραματικός νόμος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου λέει ακριβώς το αντίθετο. Η κινητική ενέργεια K είναι τελείως ανεξάρτητη από την ένταση της δέσμης και εξαρτάται μόνο από τη συχνότητά της και μάλιστα με έναν γραμμικό νόμο.
- Δ.** Με τον κλασικό μηχανισμό, η μεταβίβαση της αναγκαίας για την εξαγωγή ενέργειας από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο ηλεκτρόνιο γίνεται αναγκαστικά βαθμιαία. Έτσι μεσολαβεί υποχρεωτικά ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα από την πρόσπτωση της δέσμης στη φωτοκάθοδο μέχρι την εμφάνιση φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Για τις τυπικές εντάσεις

που χρησιμοποιούνται στα πειράματα μια απλή εκτίμηση τάξης μεγέθους –δείτε Πρόβλημα 10 στο τέλος του κεφαλαίου– δίνει μια χρονική καθυστέρηση της τάξης του δευτερολέπτου. Ενώ η πειραματική τιμή αυτού του χρόνου αν δεν είναι μηδέν είναι πάντως μικρότερη από 10^{-9} sec.

Είναι φανερό ότι η αδυναμία της κλασικής φυσικής να εξηγήσει τους νόμους του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι πλήρης και μάλλον αθεράπευτη, όπως επιβεβαιώνεται και από μια προσεκτικότερη ανάλυση του κλασικού μηχανισμού την οποία μπορείτε να κάνετε μόνοι σας με βάση τις υποδείξεις του Προβλήματος 11 στο τέλος του κεφαλαίου.

2.4. Κβαντική ερμηνεία: Η υπόθεση των φωτονίων

Σύμφωνα με την παραδοχή που προτείνεται εδώ, η ενέργεια μιας φωτεινής ακτίνας που εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή δεν είναι συνεχώς κατανεμημένη στον χώρο, αλλά αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό ενεργειακών κβάντων, που είναι τελείως εντοπισμένα στον χώρο χωρίς να διαιρούνται και τα οποία μπορούν να παραχθούν ή να απορροφηθούν μόνο ως ολόκληρες μονάδες.

A. EINSTEIN (1905)

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι το βασικό μήνυμα που μας μεταφέρουν οι πειραματικοί νόμοι μπορεί να συνοψιστεί στα ακόλουθα δύο σημεία:

Πρώτο: Το χαρακτηριστικό μέγεθος του κύματος που φαίνεται να παίζει κεντρικό ρόλο στον μηχανισμό της φωτοεκπομπής δεν είναι η ένταση αλλά η συχνότητα. Στην κλασική θεωρία του φωτός η συχνότητα είναι ένα καθαρά κυματικό χαρακτηριστικό, με τελείως δευτερεύοντα ρόλο στις ενεργειακές δοσοληψίες ύλης και ακτινοβολίας, οι οποίες ρυθμίζονται βασικά από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Τα πειραματικά αποτελέσματα μας λένε ακριβώς το αντίθετο. Η ενεργειακή δραστηριότητα του φωτός εξαρτάται κυρίως από τη συχνότητα και δευτερευόντως από την ένταση.

Δεύτερο: Η απορρόφηση της ενέργειας γίνεται πρακτικώς ακαριαία. Το ηλεκτρόνιο παίρνει από το φως την ενέργεια εξαγωγής του σε μία μοναδική δόση και όχι βαθμιαία, όπως προβλέπει η κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία.

Ενόψει των παραπάνω, ο Einstein δεν δίστασε να επεκτείνει τα όρια ισχύος της παραδοχής του Planck, θεωρώντας ότι η κβάντωση είναι μια εγγενής ιδιότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και όχι απλώς μια ιδιομορφία του μηχανισμού αλληλεπίδρασής του με την ύλη, όπως πίστευε ο ίδιος ο Planck. Έτσι διατύπωσε την υπόθεση ότι:

Υπόθεση των φωτονίων: Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από φωτόνια ενέργειας $E = hf$, όπου h η σταθερά του Planck και f η συχνότητα του κύματος.

Πριν σχολιάσουμε περισσότερο την παραδοχή του Einstein, ας δούμε πόσο απλά και αβίαστα μπορεί να εξηγήσει τους νόμους του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Πρώτα από όλα, με τη φωτονιακή θεωρία ο μηχανισμός της εξαγωγής είναι πολύ απλός. Ένα φωτόνιο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο μεταβιβάζοντάς του όλη του την ενέργεια. Ένα μέρος της αναλίσκεται ως «αντίτιμο» του έργου εξαγωγής W του μετάλλου και το υπόλοιπο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του εξερχόμενου ηλεκτρονίου. Αυτός ο ενεργειακός μετασχηματισμός εκφράζεται απλά με τη *φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein*

$$\blacktriangleright \quad hf = W + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.14)$$

από την οποία φαίνεται αμέσως ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι δυνατό μόνο όταν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής W του μετάλλου. Η οριακή συχνότητα f_0 προσδιορίζεται από τη σχέση

$$hf_0 = W$$

και η τιμή της εξαρτάται από το συγκεκριμένο μέταλλο, όπως ακριβώς δείχνει το πείραμα.

Και οι άλλοι πειραματικοί νόμοι εξηγούνται επίσης πολύ απλά. Αύξηση της φωτεινής έντασης στη φωτονιακή θεωρία σημαίνει αύξηση της ροής των φωτονίων, που με τη σειρά της συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των εξαγόμενων ηλεκτρονίων.

Είναι φανερό, επίσης, ότι η εξαγωγή γίνεται ακαριαία γιατί η μεταβίβαση της αναγκαίας ενέργειας από το φως στο ηλεκτρόνιο γίνεται στιγμιαία, με την απορρόφηση ολόκληρης της ενέργειας hf ενός φωτονίου.

Τέλος, από την εξίσωση (1.14) είναι αμέσως φανερό ότι η κινητική ενέργεια $K = mv^2/2$ των φωτοηλεκτρονίων συνδέεται με τη συχνότητα f της προσπίπτουσας δέσμης μέσω της σχέσης

$$K = hf - W = h(f - f_0) \quad (1.15)$$

της οποίας η γραφική παράσταση –για $f \geq f_0$ – είναι μια *ευθεία γραμμή*, ακριβώς όπως είχε δείξει το πείραμα (Σχ. 1.5). Μάλιστα, από τη θεωρητική εξίσωση (1.15) προκύπτει αμέσως ότι η κλίση της πειραματικής ευθείας οφείλει να είναι ίση με τη *σταθερά του Planck*. Και έτσι ακριβώς είναι.

Όμως αυτή η ανάλυση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου φέρνει στην επιφάνεια μερικές ιδέες πολύ γενικότερης σημασίας. Ας τις εξετάσουμε.

Βασικά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν είναι παρά ειδική περίπτωση μιας ευρύτερης κατηγορίας φαινομένων που αφορούν τη δράση του φωτός πάνω στην ύλη. Είναι ένα δεδομένο της κοινής εμπειρίας ότι κάτω από μια ορισμένη συχνότητα η χημική δραστηριότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σταματά τελείως, όσο μεγάλη και αν είναι η έντασή της. Όλοι ξέρουμε, παραδείγματος χάριν, ότι μαυρίζουμε όταν εκτεθούμε σε υπεριώδες φως αλλά όχι σε ορατό και, πολύ περισσότερο, σε υπέρυθρο. Το οποίο σημαίνει, βεβαίως, ότι οι χημικές αντιδράσεις που προκαλούν το μαύρισμα ενεργοποιούνται μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας υπερβεί μια ορισμένη τιμή. Η εξήγηση είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Για να συμβεί μια χημική αντίδραση πρέπει να δοθεί στα αντιδρώντα μόρια μια ελάχιστη χαρακτηριστική ενέργεια. Αν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είχε τον συνεχή χαρακτήρα που της αποδίδει η κλασική θεωρία, τότε η απαιτούμενη ενέργεια θα μπορούσε να απορροφηθεί σιγά-σιγά και επομένως η αντίδραση θα συνέβαινε ανεξάρτητα από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός. Σε έναν τέτοιο κόσμο ακόμα και τα ραδιοφωνικά κύματα θα είχαν χημική δραστηριότητα. Δηλαδή θα μαυρίζαμε ακόμα και δίπλα σε μια ραδιοφωνική κεραία! Το ότι τέτοια αλλόκοτα δεν συμβαίνουν, δείχνει πολύ καθαρά ότι *η χημική δράση του φωτός έχει κβαντικό χαρακτήρα*. Η απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια W προσλαμβάνεται σε μία και μοναδική δόση με την απορρόφηση ενός φωτονίου. Έτσι, αν η φωτεινή συχνότητα f είναι μικρότερη από την τιμή $f_{\min} = W/h$, τότε η αντίδραση δεν πρόκειται να συμβεί, όσο μεγάλη και αν είναι η φωτεινή ένταση. Και είναι, βεβαίως, ευτύχημα ότι έτσι έχουν τα πράγματα. Γιατί αλλιώς... δεν θα υπήρχαμε! Χωρίς την κβάντωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, τα ηλεκτρόνια των ατόμων και των μορίων θα απορροφούσαν συνεχώς ενέργεια από το φως οποιασδήποτε συχνότητας, με αναπόφευκτο τέλος την πλήρη διάλυση της ύλης. Σε έναν τέτοιο κόσμο η ύπαρξη σταθερών ατομικομοριακών δομών θα ήταν απολύτως αδύνατη. Διαπιστώνουμε, δηλαδή, ότι η κβάντωση του φωτός δεν είναι ένα καπρίτσιο της φύσης αλλά μια αναγκαιότητα συνυφασμένη —ούτε λίγο ούτε πολύ— με την ίδια την ύπαρξή μας. Όμως σε αυτό το θέμα —δηλαδή τη *βιολογική αναγκαιότητα των κβαντικών νόμων*— θα επανέλθουμε λίγο αργότερα, όταν θα έχουμε μιλήσει και για την κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα.

Ας προσθέσουμε ακόμα ότι ο ασυνεχής σωματιδιακός χαρακτήρας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας έχει ανιχνεύσιμες επιπτώσεις μόνο στην περιοχή των μεγάλων συχνοτήτων, δηλαδή στα μικρά μήκη κύματος, γιατί μόνο εκεί η ενέργεια του φωτεινού κβάντου είναι αρκετά μεγάλη ώστε η ατομική δράση του να έχει ανιχνεύσιμες συνέπειες. Αντίθετα, στην περιοχή των ραδιοφωνικών κυμάτων, παραδείγματος χάριν, ο σωματιδιακός χαρακτήρας είναι τελείως ανεπαίσθητος. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι ραδιοηλεκτρολόγοι εξακολουθούν να χρησιμοποιούν στους υπολογι-

σμούς τους την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, όπως τον «παλιό, καλό καιρό».

Ως προς την τάξη μεγέθους της ενέργειας hf ενός φωτεινού κβάντου, το πιο απλό σχετικό παράδειγμα είναι ένα φωτόνιο στο μέσον περίπου του ορατού φάσματος –ας πούμε $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ – για το οποίο θα είναι

$$\begin{aligned} \epsilon = hf &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{6 \times 10^3 \times 10^{-8}} \Big|_{\text{cgs}} = 3,31 \times 10^{-12} \text{ erg} \\ &= 3,31 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,068 \text{ eV} \end{aligned} \quad (1.16)$$

όπου το eV είναι, βεβαίως, το πασίγνωστο *ηλεκτρονιοβόλτ*, δηλαδή η ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν επιταχύνεται από μια διαφορά δυναμικού ενός volt. (Και το οποίο ισούται, προφανώς, με το γινόμενο ενός ηλεκτρονιακού φορτίου επί ένα volt: $1 \text{ eV} = e \cdot \text{volt}$.) Ως προς τη σχέση του με τις συνήθεις μονάδες, θα είναι

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Ένα παράπλευρο «δίδαγμα» από το αποτέλεσμα (1.16) είναι ότι η κατάλληλη μονάδα για τη μέτρηση των ενεργειών των φωτεινών κβάντων δεν είναι ούτε το erg ούτε το joule αλλά το *ηλεκτρονιοβόλτ*. Η επιλογή αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι το eV είναι επίσης η κατάλληλη ενεργειακή μονάδα για όλες τις μικροσκοπικές διαδικασίες στις οποίες λαμβάνουν μέρος τα φωτεινά κβάντα. Οι ενέργειες ιοντισμού των ατόμων, οι ενέργειες που εκλύονται ή απαιτούνται από τις χημικές αντιδράσεις, τα έργα εξαγωγής των μετάλλων κ.λπ., κ.λπ., όλες αυτές οι ποσότητες είναι της τάξης των *μερικών ηλεκτρονιοβόλτ*. Αν προστεθεί στα παραπάνω ότι και η κατάλληλη μονάδα μήκους για τον μικρόκοσμο δεν είναι ούτε το cm ούτε το m, αλλά το angstrom –όλα τα άτομα ή τα μικρά μόρια έχουν μεγέθη της τάξης των μερικών \AA , ενώ το μήκος κύματος των ορατών φωτονίων είναι επίσης ένα λογικό πολλαπλάσιο του \AA (μερικές χιλιάδες \AA)– τότε θα είναι σίγουρα χρήσιμο να γράψουμε τον τύπο $\epsilon = hc/\lambda$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνει την ενέργεια των φωτονίων κατευθείαν σε eV, αν εισαγάγουμε το μήκος κύματος λ σε \AA . Έχοντας ήδη βρει ότι για $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ είναι $\epsilon = 2,068 \text{ eV}$, η σταθερά hc θα έχει την τιμή

$$hc = 12.400 \text{ eV} \cdot \text{\AA},$$

οπότε ο τύπος $\epsilon = hf = hc/\lambda$ θα παίρνει την *πρακτική μορφή*

$$\epsilon(\text{eV}) = \frac{12.400}{\lambda(\text{\AA})}$$

και για πιο πρόχειρους (προσεγγιστικούς) υπολογισμούς την

$$\epsilon(\text{eV}) = \frac{12.000}{\lambda(\text{\AA})},$$

η οποία θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στον αναγνώστη, όχι μόνο διότι διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς, αλλά και διότι μας εξοικειώνει πολύ γρήγορα με τη σωστή τάξη μεγέθους των σχετικών ποσοτήτων.

Η χρήση του eV ως ενεργειακής μονάδας συνάδει επίσης με την καθιερωμένη πλέον πρακτική να εκφράζουμε, και να «θυμόμαστε», τις μάζες των σωματιδίων όχι σε g ή kg αλλά σε ισοδύναμη ενέργεια mc^2 μετρημένη σε eV ή στα κατάλληλα πολλαπλάσιά του (MeV ή GeV). Έτσι, π.χ., συνηθίζουμε να λέμε ότι το ηλεκτρόνιο έχει «μάζα» 0,5 MeV, το πρωτόνιο 938 MeV \simeq 1 GeV, κ.ο.κ.

Τα παραπάνω επιβάλλουν όμως και έναν διαφορετικό τρόπο εκτέλεσης των αριθμητικών υπολογισμών στις σχετικές εφαρμογές. Ένα απλό σχετικό πρόβλημα είναι το εξής:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3: Ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 2.000 \text{\AA}$ πέφτει πάνω σε ένα μέταλλο με έργο εξαγωγής $W = 2 \text{ eV}$. Υπολογίστε: α) Την κινητική ενέργεια K και την ταχύτητα v των φωτοηλεκτρονίων. β) Το δυναμικό αποκοπής V_0 .

Λύση: Με $\lambda = 2.000 \text{\AA}$ η σχέση $\epsilon(\text{eV}) = 12.000/\lambda(\text{\AA})$ δίνει αμέσως $\epsilon = 6 \text{ eV}$ οπότε, αφαιρώντας τα 2 eV του έργου εξαγωγής, απομένουν άλλα 4 eV ως κινητική ενέργεια των εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Με γνωστό το $K (= 4 \text{ eV})$ η ταχύτητα των φωτοηλεκτρονίων θα υπολογιστεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}mc^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2K}{mc^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 4 \text{ eV}}{\frac{1}{2} \times 10^6 \text{ eV}}} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow \frac{v}{c} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow v = 1,2 \times 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \end{aligned}$$

όπου η «έξυπνη κίνηση», βεβαίως, ήταν να γράψουμε το $\frac{1}{2}mv^2$ ως $\frac{1}{2}mc^2(v/c)^2$ ώστε να αξιοποιήσουμε την έτοιμη γνώση μας του mc^2 σε eV, αλλά και να έχουμε τη ζητούμενη ταχύτητα ως κλάσμα της ταχύτητας του φωτός το οποίο είναι πολλαπλά χρήσιμο έτσι κι αλλιώς. (Μεταξύ άλλων διότι αντιλαμβανόμαστε έτσι και το κατά πόσον ισχύει ή όχι ο μη σχετικιστικός χειρισμός του προβλήματος.) Όσο για το δυναμικό αποκοπής V_0 , αυτό θα είναι, προφανώς, ίσο με $V_0 = 4 \text{ Volt}$, αφού είναι $K = 4 \text{ eV}$ και ισχύει, βεβαίως, ότι $K = e \cdot V_0$.

2.5. Τα φωτόνια έχουν όχι μόνο ενέργεια, αλλά και ορμή. Η πλήρης κυματοσωματιδιακή εικόνα του φωτός

Είναι ένα αναντίρρητο γεγονός ότι υπάρχει μια εκτεταμένη συλλογή δεδομένων για την ακτινοβολία που δείχνουν ότι το φως έχει ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες που μπορούν να κατανοηθούν πολύ πιο εύκολα από τη σκοπιά της σωματιδιακής θεωρίας του Νεύτωνα παρά από τη σκοπιά της κυματικής θεωρίας.

Επομένως, κατά τη γνώμη μου, η επόμενη φάση ανάπτυξης της θεωρητικής φυσικής θα μας οδηγήσει σε μια θεωρία για το φως, που θα μπορεί να ερμηνευθεί σαν ένα είδος συγκερασμού της κυματικής και της σωματιδιακής εικόνας.

A. EINSTEIN (1909)

Η προηγούμενη ανάλυση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου κατοχυρώνει αναμφίβολα την κβάντωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ως ένα εγγενές χαρακτηριστικό της και όχι απλώς ως μια ιδιαιτερότητα του μηχανισμού αλληλεπίδρασής της με την ύλη, όπως υποστήριζε ο Planck. Εντούτοις δεν μπορούμε ακόμα να πούμε με σιγουριά ότι τα κβάντα του φωτός –τα φωτόνια– είναι όντως σωματίδια με όλη τη σημασία του όρου. Διότι για να ισχύει αυτό, τα φωτόνια θα πρέπει να είναι όχι μόνο φορείς ενέργειας αλλά και ορμής, όπως και τα κοινά σωματίδια. Ποια μπορεί να είναι η ορμή ενός φωτονίου και πώς σχετίζεται με τα κυματικά χαρακτηριστικά του αντίστοιχου ηλεκτρομαγνητικού κύματος; Η θεωρία της σχετικότητας θα μας βοηθήσει να βρούμε μια εύλογη απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Πράγματι, δεδομένου ότι το φωτεινό κβάντο κινείται με την ταχύτητα –τίνος άλλου;– του φωτός, η ορμή του θα πρέπει να γράφεται ως

$$p = \mu c,$$

όπου μ η μάζα του. Πόσο είναι όμως το μ ; Η απάντηση προκύπτει αμέσως από τη σχέση ισοδυναμίας μάζας-ενέργειας $\epsilon = \mu c^2$ σε συνδυασμό με τη σχέση $\epsilon = hf$ που δίνει την ενέργεια του φωτονίου. Θα είναι λοιπόν

$$\epsilon = hf = \mu c^2 \Rightarrow \mu = \frac{hf}{c^2}$$

και κατόπιν

$$p = \mu c = \frac{hf}{c^2} \cdot c = \frac{hf}{c} = \frac{h}{(c/f)} = \frac{h}{\lambda}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχετικότητα, τα φωτόνια, ακριβώς επειδή έχουν ενέργεια hf , θα έχουν υποχρεωτικά και μια ισοδύναμη μάζα hf/c^2 , άρα και μια

ορμή ίση με το γινόμενο αυτής της μάζας επί την ταχύτητα c του φωτός. Δηλαδή $p = (hf/c^2) \cdot c = hf/c = h/\lambda$. Έτσι η πλήρης κυματοσωματιδιακή εικόνα του φωτός θα εκφράζεται τελικά μέσω των σχέσεων

$$\blacktriangleright \quad \epsilon = hf, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

οι οποίες συνδέουν τα κυματικά χαρακτηριστικά f και λ του κλασικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά ϵ και p –ενέργεια και ορμή– του αντίστοιχου φωτονίου.

Ως προς την έννοια της «μάζας του φωτονίου» –όπως δίνεται από τον τύπο hf/c^2 – ας διευκρινίσουμε αμέσως ότι δεν πρόκειται για μάζα ηρεμίας, αλλά για μάζα κίνησης (ή ισοδύναμη μάζα) αφού το φωτόνιο κινείται με την ταχύτητα του φωτός και άρα η μάζα ηρεμίας του θα είναι μηδενική. Αυτό το τελευταίο –δηλαδή ότι $m_0 = 0$ – ισχύει για κάθε σωματίδιο που κινείται με $v = c$ και προκύπτει αμέσως από τον τύπο

$$m \equiv m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1.17)$$

ο οποίος για $v = c$ θα έδινε $m = \infty$, εκτός και αν ήταν $m_0 = 0$. Για μεταγενέστερη χρήση, σημειώστε ακόμα ότι με συνδυασμό του τύπου (1.17) και των σχέσεων

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad p = m(v)v = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

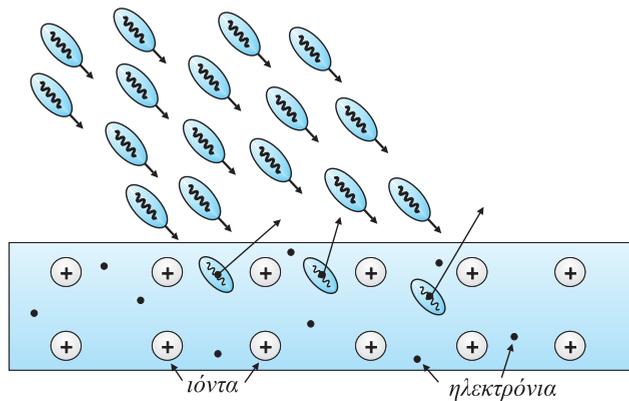
που δίνουν την (σχετικιστική) ενέργεια και ορμή ενός σωματιδίου μάζας m_0 και ταχύτητας v , προκύπτει ότι στη σχετικότητα η σχέση ενέργειας-ορμής –που είχε στη νευτώνεια μηχανική τη μορφή $E = p^2/2m$ – γράφεται τώρα ως

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}$$

οπότε, για ένα σωματίδιο όπως το φωτόνιο, με $m_0 = 0$, θα είναι

$$E = cp \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

που είναι το προηγούμενό μας αποτέλεσμα. Η σχετικότητα δεν αφήνει λοιπόν καμία αμφιβολία ότι το φωτόνιο –το κβάντο του φωτός– θα είναι ένα σωματίδιο με την πλήρη σημασία του όρου. Εκτός από ενέργεια $\epsilon = hf$ θα φέρει και ορμή $p = h/\lambda$.



ΣΧΗΜΑ 1.6: Μια σύγχρονη εικόνα για το φως. Η φωτεινή δέσμη που πέφτει στην επιφάνεια ενός μετάλλου και αποσπά τα ηλεκτρόνιά του μπορεί να παρασταθεί ως ένα είδος «φωτεινής βροχής» αλλά με απόλυτα «συμπαγείς» σταγόνες που μπορούν να απορροφηθούν μόνο ως αδιαίρετες μονάδες.

Ύστερα από τα παραπάνω, μια παραστατική εικόνα για το «κβαντωμένο φως» θα ήταν όπως αυτή του Σχήματος 1.6, όπου τα φωτόνια –π.χ., αυτά που πέφτουν σε ένα μέταλλο και πραγματοποιούν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο– παριστάνονται ως ελαφρώς επιμηκυσμένες «σταγόνες» με μια κυματοειδή γραμμή στο εσωτερικό τους ως υπόμνηση της κυματικής τους φύσης την οποία επίσης διατηρούν όπως ήδη σημειώσαμε.

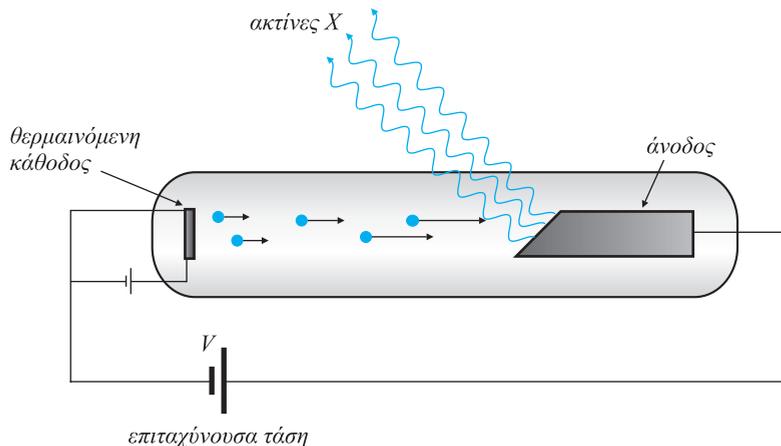
Αν επιπλέον φροντίζετε να μην ξεχνάτε ότι αυτές οι «φωτεινές σταγόνες» δεν «θρυμματίζονται» όταν πέφτουν στο «έδαφος» –δηλαδή στη μεταλλική επιφάνεια στην περίπτωση μας– αλλά απορροφώνται μόνο ως αδιαίρετες μονάδες, τότε θα έχετε μια πολύ καλή σύγχρονη εικόνα για το φως.

3. Το φαινόμενο Compton

3.1. Περιγραφή του φαινομένου: Κλασική πρόβλεψη και πειραματικά αποτελέσματα

Είδαμε προηγουμένως ότι η σχετικότητα υποχρεώνει τα φωτεινά κβάντα –τα φωτόνια– να είναι σωματίδια με όλη τη σημασία του όρου· εκτός από ενέργεια, $\epsilon = hf$, να έχουν και ορμή $p = h/\lambda$. Όμως αυτή είναι μόνο μια *θεωρητική πρόβλεψη* –διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Einstein το 1919– και άρα θα πρέπει να ελεγχθεί πειραματικά. Ποιο θα ήταν ένα κατάλληλο πείραμα γι' αυτόν τον σκοπό; Απλούστατα ένα πείραμα στο οποίο η ορμή να

παίζει έναν σημαντικό ρόλο. Τέτοια πειράματα στην κλασική φυσική είναι, βεβαίως, τα πειράματα συγκρουόμενων σωματιδίων όπου πράγματι η ορμή είναι ένα σημαντικό μέγεθος, αφού οφείλει να παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης. Μια εύλογη σκέψη λοιπόν θα ήταν να στείλουμε φωτόνια να «σκεδαστούν» πάνω σε κοινά σωματίδια –π.χ., ηλεκτρόνια– και να δούμε αν όντως τα φωτόνια συμπεριφέρονται κατά τη σύγκρουση αυτή ως σωματίδια με την ορμή που προβλέπει η δεύτερη σχέση του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού ($p = h/\lambda$). Το φαινόμενο *Compton* ή, καλύτερα, το πείραμα *Compton*, είναι ακριβώς αυτό: η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας πάνω σε φορτισμένα σωματίδια και, ειδικότερα, πάνω σε ηλεκτρόνια. Ως προς την ακτινοβολία που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι εύλογο ότι θα πρέπει να έχει αρκετά μικρό μήκος κύματος ώστε η ορμή των φωτονίων της, $p = h/\lambda$, να είναι αρκετά μεγάλη και έτσι η σύγκρουσή τους με τα ηλεκτρόνια να έχει ένα μετρήσιμο αποτέλεσμα: μια μεγάλη μεταφορά ορμής και ενέργειας από τα φωτόνια στα ηλεκτρόνια. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται πολύ άνετα με τη χρήση ακτίνων X, των οποίων τα φωτόνια έχουν ενέργεια μερικών keV και αντίστοιχο μήκος κύματος της τάξεως των μερικών angstrom. (Θυμηθείτε τον τύπο $\epsilon(\text{eV}) \simeq 12.000/\lambda(\text{\AA}) \Rightarrow \lambda(\text{\AA}) \simeq 12.000/\epsilon(\text{eV})$.) Υπενθυμίζουμε επ' ευκαιρία ότι οι ακτίνες X παράγονται από μια συσκευή όπως αυτή του Σχήματος 1.7. Μια θερμαινόμενη κάθοδος εκπέμπει ηλεκτρόνια τα οποία επιτα-



ΣΧΗΜΑ 1.7: Ένας σωλήνας ακτίνων X. Τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από τη θερμαινόμενη κάθοδο επιταχύνονται από μια μεγάλη διαφορά δυναμικού (δεκάδες kV) και «φρενάζονται» πάνω στην άνοδο μετατρέποντας –εν όλω ή εν μέρει– την κινητική τους ενέργεια σε αντίστοιχα φωτεινά κβάντα. Η μέγιστη δυνατή ενέργεια hf_{\max} των εκπεμπόμενων φωτονίων θα είναι ίση με $e \cdot V$, όπου V η επιταχύνουσα τάση.

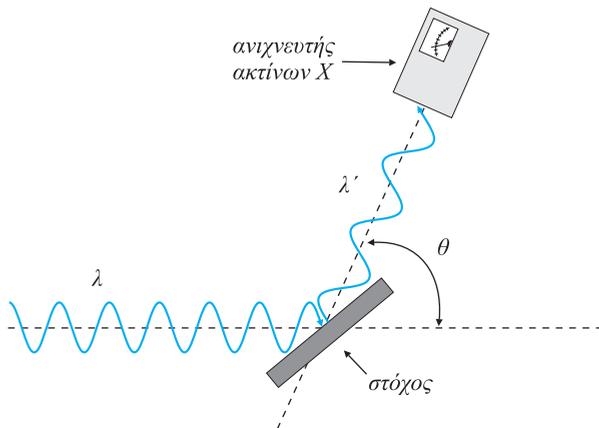
χύνονται από μια διαφορά δυναμικού της τάξεως των δεκάδων kV (kilovolt) και προσπίπτουν πάνω στο υλικό της ανόδου όπου και «φρενάρονται» πολύ απότομα, εκπέμποντας ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Στην πραγματικότητα, λόγω της κβαντικής φύσης του φωτός, η εκπομπή αυτή θα γίνεται υπό μορφή φωτονίων με ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων –αφού η κίνηση των ηλεκτρονίων δεν είναι μια αρμονική ταλάντωση– που θα φτάνει μέχρι μια μέγιστη τιμή f_{\max} που προσδιορίζεται από τη σχέση

$$hf_{\max} = K = e \cdot V \quad (1.18)$$

όπου K η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων όταν φτάνουν στην άνοδο, και η οποία ισούται επίσης με το έργο $e \cdot V$ της επιταχύνουσας τάσης πάνω στα συγκεκριμένα ηλεκτρόνια. Η σχέση (1.18) προκύπτει, βεβαίως, αν θεωρήσουμε ότι όλη η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου εκπέμπεται υπό μορφή ενός φωτεινού κβάντου. Το οποίο, όμως, δεν είναι αναγκαστικό να συμβαίνει, γι' αυτό και η συχνότητα f_{\max} που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο –σχέση (1.18)– αποτελεί απλώς το άνω όριο του φάσματος ακτίνων X που εκπέμπεται από τον αντίστοιχο σωλήνα για μια δεδομένη επιταχύνουσα τάση V . Ταυτόχρονα όμως θα πρέπει να ειπωθεί ότι η σχέση (1.18) μας παρέχει όχι απλώς ένα άνω όριο αλλά και μια καλή εκτίμηση της ενέργειας που έχουν τα περισσότερα από τα φωτόνια ακτίνων X, τα οποία παράγονται από τον σωλήνα. Παραδείγματος χάριν, για μια επιταχύνουσα τάση ίση με πενήντα χιλιάδες volt (50 kV) τα παραγόμενα φωτόνια θα έχουν ενέργειες της τάξεως των τριάντα έως πενήντα χιλιάδων ηλεκτρονιοβόλτ (30-50 keV).

Μετά την ακτινοβολία, το επόμενο ερώτημα για τη σωστή σχεδίαση του πειράματος Compton αφορά τα ηλεκτρόνια. Ποιος θα είναι ο «στόχος»; Θα είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός μετάλλου ή τα δέσµια ηλεκτρόνια των ατόμων ή μορίων ενός τυχόντος υλικού; Η απάντηση είναι ότι δεν έχει καμιά σημασία. Οι ενέργειες των φωτονίων των ακτίνων X είναι τόσο μεγάλες σε σύγκριση με τις ενέργειες δέσμευσης των εξωτερικών ηλεκτρονίων στα άτομα ή τα μόρια –μερικές δεκάδες keV έναντι μόλις μερικών eV– ώστε να είναι κυριολεκτικά «αστείο» να εκλαμβάνονται ως «δέσµια» αυτά τα ηλεκτρόνια. Επιπλέον –ενόψει των τεράστιων ορμών που «φέρουν» τα προσπίπτοντα φωτόνια– δεν θα πρέπει να έχουν ιδιαίτερη σημασία ούτε οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί ως στόχος. Τα ηλεκτρόνια αυτά μπορεί να θεωρηθούν περίπου ως ακίνητα. Από πρακτικής πλευράς μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε ως στόχο οποιοδήποτε υλικό θέλουμε, και να θεωρήσουμε επίσης ότι τα ηλεκτρόνιά του είναι ουσιαστικά ακίνητα.

Μια σχηματοποιημένη πειραματική διάταξη για τη μελέτη της σκέδασης Compton –έτσι αποκαλείται σήμερα η σύγκρουση υψίσυχων φωτονίων με ελεύθερα ηλεκτρόνια– θα είναι όπως στο Σχήμα 1.8.



ΣΧΗΜΑ 1.8: Το πείραμα Compton. Μια δέσμη ακτίνων X στέλνεται πάνω σε έναν υλικό στόχο (γραφίτης στο αρχικό πείραμα) και, αφού σκεδαστεί στα ηλεκτρόνιά του, ανιχνεύεται σε διάφορες γωνίες θ ως προς την κατεύθυνση της αρχικής δέσμης. Το βασικό αποτέλεσμα του πειράματος είναι ότι η σκεδαζόμενη ακτινοβολία έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος από την αρχική και μάλιστα τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία σκέδασης θ .

Το βασικό αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Το φαινόμενο Compton: Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μικρού μήκους κύματος (π.χ., ακτίνες X) πάνω σε ελεύθερα ή ασθενώς δέσμη ηλεκτρόνια συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματός της. Η αύξηση είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία σκέδασης θ .

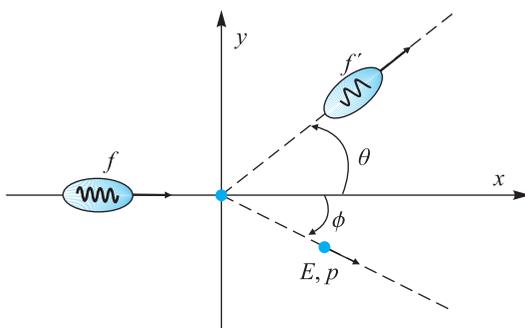
Για μεγαλύτερη ακρίβεια ας προσθέσουμε ότι το πείραμα Compton εκτός από φωτόνια με $\lambda' > \lambda$ δίνει –για την κάθε γωνία θ στην οποία εκτελείται– και φωτόνια με $\lambda' = \lambda$, δηλαδή χωρίς μεταβολή μήκους κύματος. Τα φωτόνια αυτά προέρχονται από σκέδαση των αρχικών πάνω στα ισχυρώς δέσμη εσωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων του στόχου, τα οποία συμπεριφέρονται πολύ διαφορετικά κατά την κρούση, εφόσον συμπαρασύρουν και όλο το άτομο μαζί τους. Πρόκειται δηλαδή για σκέδαση των φωτονίων πάνω σε ιόντα που είναι κατά πολύ βαρύτερα από τα ηλεκτρόνια. Και όπως θα δούμε σε λίγο, η αλλαγή μήκους κύματος είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη μάζα των σκεδαστών και άρα αμελητέα σε αυτή την περίπτωση.

Ως προς τη δυνατότητα κλασικής ερμηνείας του φαινομένου Compton γίνεται γρήγορα φανερό ότι η παρατηρούμενη μεταβολή συχνότητας και μήκους κύματος είναι ακατανόητη μέσα στο πλαίσιο του κλασικού ηλεκτρο-

μαγνητισμού. Όπου ο μηχανισμός του φαινομένου είναι πολύ απλός. Το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος θέτει τα ηλεκτρόνια του στόχου σε αρμονική ταλάντωση^(*) με συχνότητα ίση με τη συχνότητα του κύματος. Τα ταλαντευόμενα ηλεκτρόνια, με τη σειρά τους, εκπέμπουν (μια και επιταχύνονται) ένα δευτερογενές ηλεκτρομαγνητικό κύμα με τη συχνότητα της ταλάντωσής τους, δηλαδή τη συχνότητα του αρχικού κύματος. Σύμφωνα λοιπόν με την κλασική θεωρία, η μεταβολή συχνότητας κατά τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας πάνω σε ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι αδύνατη. Το φαινόμενο *Compton* δεν υπάρχει!

3.2. Κβαντική ερμηνεία

Σύμφωνα με τη φωτονιακή θεωρία της ακτινοβολίας, το φαινόμενο Compton δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ελαστική κρούση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο. Ο λεπτομερειακός μηχανισμός του φαινομένου είναι ο ακόλουθος: το φωτόνιο απορροφάται προς στιγμήν από το ηλεκτρόνιο και αμέσως μετά επανεκπέμπεται σε μια κατεύθυνση διαφορετική εν γένει από την αρχική. Η αρχική και η τελική φάση αυτής της διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 1.9.



ΣΧΗΜΑ 1.9: Η σκέδαση Compton ως σύγκρουση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο. Ως αποτέλεσμα της σύγκρουσης το ηλεκτρόνιο θα πάρει ένα μέρος από την ενέργεια του φωτονίου, το οποίο επομένως θα σκεδαστεί με μειωμένη ενέργεια, άρα και μειωμένη συχνότητα ή αυξημένο μήκος κύματος.

^(*) Με την πιθανή προσθήκη μιας ομαλής μεταφορικής κίνησης αν θεωρηθεί ότι το ηλεκτρόνιο είχε και μια αρχική ταχύτητα v_0 . Αυτό προκύπτει αμέσως από τη λύση της εξίσωσης του Νεύτωνα $m\ddot{x} = -eE_0 \cos \omega t$, σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, η οποία δίνει

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} (\cos \omega t - 1) + v_0 t.$$

Ο βασικός πειραματικός νόμος του φαινομένου εξηγείται τώρα πολύ απλά. Καθώς το δευτερογενές φωτόνιο εκπέμπεται σε μια διαφορετική κατεύθυνση από την αρχική, η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει στο αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο να κινηθεί αποκτώντας έτσι μια κινητική ενέργεια. Αλλά αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια του δευτερογενούς φωτονίου θα είναι μειωμένη, σε σχέση με την αρχική, κατά ποσό ίσο με την κινητική ενέργεια που απέκτησε το ηλεκτρόνιο. Έτσι, αν ϵ , ϵ' και f , f' είναι οι αρχικές και τελικές τιμές ενέργειας και συχνότητας του φωτονίου, θα έχουμε

$$\epsilon' < \epsilon \Rightarrow hf' < hf \Rightarrow f' < f$$

όπως ακριβώς δείχνει το πείραμα. Για τα μήκη κύματος $\lambda = c/f$ και $\lambda' = c/f'$ θα είναι αντίστοιχα $\lambda' > \lambda$.

Η αλλαγή $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ του μήκους κύματος θα εξαρτάται, βεβαίως, από τη γωνία εκπομπής θ του δευτερογενούς φωτονίου. Αυτή η εξάρτηση μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα, αν γράψουμε τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας για την ελαστική κρούση του προηγούμενου σχήματος. Και η μόνη αλλαγή σε σχέση με μια κοινή σωματιδιακή σύγκρουση είναι ότι τώρα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής για το ηλεκτρόνιο

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (m \equiv m_0)$$

διότι τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν πολύ μεγάλη ενέργεια και θα συμπαρασύρουν σε αντίστοιχα βίαιη κίνηση τα ηλεκτρόνια. Για τα φωτόνια θα ισχύουν οι σχέσεις του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού

$$\epsilon = hf, \quad p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c},$$

οπότε οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας θα γράφονται ως

$$\text{Διατήρηση της ενέργειας} \quad : \quad hf + mc^2 = hf' + E \quad (1.19)$$

$$\text{Διατήρηση της ορμής} \\ \text{κατά τον άξονα } x \quad : \quad \frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p \cos \phi \quad (1.20)$$

$$\text{Διατήρηση της ορμής} \\ \text{κατά τον άξονα } y \quad : \quad 0 + 0 = \frac{hf'}{c} \sin \theta - p \sin \phi \quad (1.21)$$

όπου E και p η ενέργεια και η ορμή του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου και ϕ η γωνία σκέδασής του (Σχ. 1.9). Για να υπολογίσουμε τώρα τη συχνότητα f' του δευτερογενούς φωτονίου συναρτήσει της γωνίας εκπομπής του θ —διότι αυτή κυρίως μας ενδιαφέρει—είναι σκόπιμο να απαλείψουμε τις παραμέτρους E , p και ϕ που αφορούν το ηλεκτρόνιο.

Η απαλοιφή της γωνίας ϕ γίνεται πολύ εύκολα αν κρατήσουμε τους όρους $p \cos \phi$ και $p \sin \phi$ στη μια μεριά των εξισώσεων (1.20) και (1.21), υψώσουμε στο τετράγωνο και τις προσθέσουμε. Έτσι παίρνουμε (πολλαπλασιάζοντας και με c^2)

$$c^2 p^2 = h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta). \quad (1.22)$$

Η απαλοιφή των E και p γίνεται επίσης πολύ απλά με βάση τη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής του ηλεκτρονίου

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

στην οποία αντικαθιστούμε το E από την (1.19) με

$$E = h(f - f') + mc^2$$

και το $c^2 p^2$ από την (1.22). Έτσι θα έχουμε

$$[h(f - f') + mc^2]^2 - h^2 (f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta) = m^2 c^4,$$

από όπου –εκτελώντας τις πράξεις– βρίσκουμε αμέσως ότι θα είναι

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

ή, ισοδύναμα, για την αλλαγή μήκους κύματος

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = c \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} \right)$$

►
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Η ποσότητα h/mc συμβολίζεται με λ_C και είναι γνωστή ως *μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου*, παρ' ότι, βεβαίως, δεν αντιπροσωπεύει κανένα πραγματικό μήκος κύματος, αλλά είναι απλώς μια ποσότητα με διαστάσεις μήκους που υπεισέρχεται στον τύπο του Compton για το $\Delta\lambda$.

Για τις γνωστές τιμές των σταθερών h , m ($\equiv m_e$) και c θα είναι

►
$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ \AA},$$

το οποίο σημαίνει ότι η αλλαγή $\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \Rightarrow (\Delta\lambda)_{\max} = 2\lambda_C$ είναι αμελητέα για το ορατό φως –όπου $\lambda \simeq 6.000 \text{ \AA}$ – αλλά γίνεται σημαντική στις

ακτίνες X, και ιδίως στις *σκληρές ακτίνες X*, των οποίων το μήκος κύματος είναι της τάξεως του angstrom ή ακόμα μικρότερο. Διότι, βεβαίως, αυτό που έχει σημασία για την παρατηρησιμότητα του φαινομένου Compton –όπως και κάθε παρόμοιου φαινομένου– δεν είναι το απόλυτο μέγεθος της αλλαγής $\Delta\lambda$ αλλά η *ποσοστιαία αλλαγή*

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_C}{\lambda} (1 - \cos \theta)$$

η οποία είναι σημαντική μόνο όταν το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος φωτονίου είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου.

Όταν $\lambda = \lambda_C$, τότε η ενέργεια $\epsilon = hf = hc/\lambda$ του φωτονίου είναι ίση με την ενέργεια ηρεμίας mc^2 του ηλεκτρονίου. Πράγματι, για $\lambda = \lambda_C = h/mc$ θα έχουμε

$$\epsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_C} = \frac{hc}{h/mc} = mc^2.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το φαινόμενο Compton αρχίζει να γίνεται σημαντικό όταν η ενέργεια του πρωτογενούς φωτονίου γίνει συγκρίσιμη με την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου ή μεγαλύτερη από αυτήν.

Αυτό είναι και ποιοτικά προφανές. Όπως όλοι ξέρουμε, όταν ένα μικρό ατσάλινο σφαιρίδιο συγκρούεται με μια βαριά ακίνητη σφαίρα απλώς αναπηδά χωρίς απώλεια ταχύτητας ή ενέργειας. Αντίθετα, όταν πέφτει πάνω σε μια ακίνητη σφαίρα συγκρίσιμης μάζας τότε της μεταβιβάζει ένα μεγάλο μέρος από την κινητική του ενέργεια. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και κατά την ελαστική κρούση ενός φωτονίου με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Ένα φωτόνιο ενέργειας $\epsilon = hf$ έχει μια «μάζα κίνησης» $\mu = \epsilon/c^2 = hf/c^2$. Έτσι, όταν το φωτόνιο είναι πολύ «ελαφρότερο» από το ακίνητο ηλεκτρόνιο ($\mu \ll m$), τότε απλώς θα αναπηδήσει πάνω του χωρίς καμιά ενεργειακή απώλεια και επομένως χωρίς αλλαγή συχνότητας. Μια τέτοια αλλαγή θα συμβεί μόνο όταν το φωτόνιο αρχίσει να γίνεται εξίσου «βαρύ» ή «βαρύτερο» από το ηλεκτρόνιο. Όταν δηλαδή $\mu \geq m$. Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την $\lambda \leq \lambda_C$ που δώσαμε πριν.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα θα βοηθήσει τον αναγνώστη να αποκτήσει μια ολοκληρωμένη κατανόηση του φαινομένου Compton.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: Σε ένα πείραμα Compton τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν μήκος κύματος $\lambda = 1,2 \times 10^{-2} \text{ \AA} = \lambda_C/2$ και κάποια από αυτά ανιχνεύονται από έναν μετρητή που έχει τοποθετηθεί σε μια γωνία 60° από την κατεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης. Υπολογίστε: α) Το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου καθώς επίσης την ορμή και την ενέργειά του. β) Την ορμή και την ενέργεια του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου καθώς και τη γωνία σκέδασής του. Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συναρτήσει της μάζας του ηλεκτρονίου και θεμελιωδών φυσικών σταθερών.

Αύση: Για $\lambda = \lambda_C/2$ και $\theta = 60^\circ$ ($\Rightarrow \cos \theta = 1/2$) ο τύπος $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta)$ δίνει αμέσως $\lambda' = \lambda_C$, δηλαδή διπλάσιο μήκος κύματος από το αρχικό. Ως προς την ορμή και την ενέργεια του φωτονίου πριν και μετά τη σκέδαση, θα είναι

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_C/2} = \frac{h}{(h/mc)/2} = 2mc, \quad p'_\gamma = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda_C} = mc$$

και

$$\epsilon = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_C/2} = 2mc^2, \quad \epsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda_C} = mc^2,$$

όπου ο δείκτης « γ » στο σύμβολο p της ορμής αντιστοιχεί, βεβαίως, στο καθιερωμένο σωματιδιακό σύμβολο του φωτονίου (προφανώς από τις «ακτίνες γ ») και προστίθεται για διάκριση από το σύμβολο p της ορμής του ηλεκτρονίου. Με τα παραπάνω δεδομένα οι αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής θα γράφονται ως

α) Διατήρηση ενέργειας

$$\begin{aligned} \epsilon + mc^2 &= \epsilon' + E \Rightarrow 2mc^2 + mc^2 = mc^2 + E \\ &\Rightarrow E = 2mc^2 \end{aligned}$$

β) Διατήρηση ορμής κατά τον άξονα x (Σχ. 1.9 με $\theta = 60^\circ$)

$$\begin{aligned} p_\gamma + 0 &= p'_\gamma \cos \theta + p \cos \phi \Rightarrow 2mc + 0 = mc \frac{1}{2} + p \cos \phi \\ &\Rightarrow p \cos \phi = \frac{3}{2}mc \end{aligned} \quad (1)$$

γ) Διατήρηση ορμής κατά τον άξονα y

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= p'_\gamma \sin \theta - p \sin \phi \Rightarrow 0 = mc \frac{\sqrt{3}}{2} - p \sin \phi \\ &\Rightarrow p \sin \phi = mc \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Τετραγωνίζοντας και προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει αμέσως ότι

$$p^2 = 3m^2c^2 \Rightarrow p = \sqrt{3}mc$$

οπότε, βάσει της (1), θα είναι $\sqrt{3}mc \cos \phi = (3/2)mc \Rightarrow \cos \phi = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \phi = 30^\circ$.

Με υπολογισμένα τα p και E για το ηλεκτρόνιο ($p = \sqrt{3}mc$, $E = 2mc^2$), είναι επιβεβλημένο να διερωτηθούμε αν οι τιμές αυτές ικανοποιούν τη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$. Και όντως την ικανοποιούν, όπως θα δει αμέσως ο αναγνώστης.

Με την παρατήρηση του φαινομένου Compton το 1922, και οι τελευταίες αντιρρήσεις για τον δυαδικό χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας καταρρέουν. Η υπόθεση του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού του φωτός αποκτά πια ακλόνητη πειραματική βάση.

3.3. Η παλιά και η σύγχρονη σταθερά του Planck

Θα τελειώσουμε τούτο το κεφάλαιο εισάγοντας παράλληλα με τη σταθερά h , που χρησιμοποιούσαμε ως τώρα, και τη λεγόμενη *σύγχρονη* (ή *ανηγμένη*) *σταθερά του Planck* που συνδέεται με την παλιά μέσω της σχέσης

$$\blacktriangleright \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

και διακρίνεται από αυτήν με τη χαρακτηριστική *γραμμούλα* πάνω στο παλιό σύμβολο. Η χρησιμότητα αυτής της νέας σταθεράς οφείλεται στο γεγονός ότι μέσω αυτής οι σχέσεις του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού του φωτός

$$E = hf, \quad p = h/\lambda$$

γράφονται στην πολύ κομψότερη μορφή

$$\blacktriangleright \quad E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k,$$

όπου ω ($= 2\pi/T = 2\pi f$) και k ($= 2\pi/\lambda$) η *κυκλική συχνότητα* και ο *κυματιριθμός* του θεωρούμενου ΗΜ κύματος αντίστοιχα. Και δεδομένου ότι οι ποσότητες ω και k είναι πολύ καταλληλότερες από τις f και λ για τη μαθηματική περιγραφή των κυμάτων –μεταξύ άλλων διότι τότε ένα ημιτονοειδές κύμα γράφεται ως $\sin(kx - \omega t)$ αντί $\sin(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi ft)$ – το ίδιο θα ισχύει και για τη σταθερά \hbar έναντι της h . Η \hbar είναι πολύ καταλληλότερη από την h για τη μαθηματική περιγραφή της κβαντομηχανικής, ενώ η h υπερτερεί της \hbar όταν μιλάμε για τα κβαντικά φαινόμενα σε ένα φαινομενολογικό και πειραματικό πλαίσιο. Σε αυτό το πνεύμα η «παλιά» σταθερά του Planck θα εξακολουθήσει να χρησιμοποιείται και στο πρώτο μέρος του επόμενου κεφαλαίου –όσο συζητάμε πειραματικά αποτελέσματα– αλλά θα εγκαταλειφθεί μόλις προχωρήσουμε στην πρώτη απόπειρα μαθηματικής περιγραφής τους, που είναι η *θεωρία του Bohr*. Ενώ, βέβαια, από το μεθεπόμενο κεφάλαιο –όταν θα έχουμε καταλήξει πλέον στην *εξίσωση Schrödinger* ως τον θεμελιώδη νόμο της κβαντομηχανικής– η σταθερά h θα εγκαταλειφθεί οριστικά και μόνο η \hbar θα εμφανίζεται στις εξισώσεις μας, με το όνομα πάλι *σταθερά του Planck* αφού η χρήση ιδιαίτερου συμβόλου δεν αφήνει περιθώρια σύγχυσης. Όσο για την αριθμητική τιμή της \hbar , αυτή θα είναι ίση με

$$\blacktriangleright \quad \hbar = 1,05 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

και προσεγγιστικά $\hbar \simeq 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} = 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

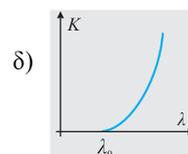
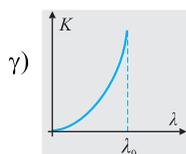
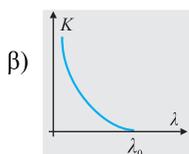
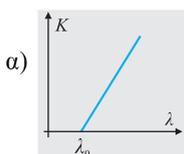
A: Αυτοεξέταση πολλαπλής επιλογής

Ακτινοβολία μέλανος σώματος

- ✓ 1. Η θερμοκρασία ενός σώματος αυξάνεται από $\theta = 27^\circ\text{C}$ σε $\theta = 327^\circ\text{C}$. Η ένταση της θερμικής του ακτινοβολίας θα:
 - α) 4πλασιαστεί, β) 16πλασιαστεί, γ) ~ 12 πλασιαστεί, δ) 2πλασιαστεί.
2. Λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας του, το μήκος κύματος μέγιστης εκπομπής του προηγούμενου σώματος:
 - α) θα υποδιπλασιαστεί, β) θα διπλασιαστεί,
 - γ) θα γίνει ~ 12 φορές μικρότερο, δ) θα τετραπλασιαστεί.
3. Η κλασική φυσική περιγράφει σωστά την ακτινοβολία του μέλανος σώματος στο όριο:
 - α) των μικρών μηκών κύματος, β) των μεγάλων μηκών κύματος,
 - γ) των μεγάλων σωματιδίων, δ) των υψηλών θερμοκρασιών.
- ✓ 4. Τα φωτόνια που αντιστοιχούν στο μέγιστο (ως προς λ) της θερμικής ακτινοβολίας ενός σώματος έχουν ενέργεια 6 eV. Η θερμοκρασία του σώματος θα είναι:
 - α) 10.000 K, β) 3.000 K, γ) 1.500 K, δ) 15.000 K.
5. Η ολική ένταση της θερμικής ακτινοβολίας του προηγούμενου σώματος (σε W/m^2) θα είναι:
 - α) $2,9 \times 10^8 \text{ W}/\text{m}^2$, β) $5,67 \times 10^8 \text{ W}/\text{m}^2$, γ) $5,67 \times 10^9 \text{ W}/\text{m}^2$, δ) $2,9 \times 10^9 \text{ W}/\text{m}^2$.
 Δίνεται ότι: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

- ✓ 6. Πάνω σε ένα μέταλλο με έργο εξαγωγής 4 eV προσπίπτει ακτινοβολία μήκους κύματος 3.000 Å. Η ταχύτητα των εξαγόμενων φωτοηλεκτρονίων θα είναι ίση με:
 - α) $1,2 \times 10^8 \text{ cm}/\text{s}$, β) $2,4 \times 10^8 \text{ cm}/\text{s}$, γ) $4,2 \times 10^6 \text{ cm}/\text{s}$, δ) μηδέν.
7. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που προσπίπτει στην επιφάνεια του προηγούμενου σώματος μειώνεται στα 2.000 Å. Η ταχύτητα των εξαγόμενων φωτοηλεκτρονίων θα είναι τότε ίση με:
 - α) $8,4 \times 10^8 \text{ cm}/\text{s}$, β) $8,4 \times 10^7 \text{ cm}/\text{s}$, γ) $4,2 \times 10^8 \text{ cm}/\text{s}$, δ) $1,2 \times 10^8 \text{ cm}/\text{s}$.
8. Αν το οριακό μήκος κύματος για την εξαγωγή φωτοηλεκτρονίων από ένα μέταλλο είναι λ_0 , η γραφική παράσταση της κινητικής τους ενέργειας συναρτήσει του λ θα έχει τη μορφή:



9. Αν υποθεθεί, χάριν απλότητας, ότι ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας των 100 W εκπέμπει όλη του την ισχύ υπό μορφή ορατών φωτονίων μήκους κύματος 6.000 Å (περίπου στο μέσον του ορατού φάσματος), ο αριθμός αυτών των φωτονίων που εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο θα είναι χονδρικά ίσος με:
 α) 3×10^{21} , β) 10^{23} , γ) 3×10^{20} , δ) 3×10^9 .
 Η σχέση Joule, erg και eV θεωρείται γνωστή.
- ✓ 10. Η χημική δραστικότητα της ΗΜ ακτινοβολίας:
 α) αυξάνεται με το μήκος κύματος,
 β) ελαττώνεται με το μήκος κύματος,
 γ) εξαρτάται κυρίως από την έντασή της,
 δ) είναι ανεξάρτητη από όλα τα παραπάνω.

Φαινόμενο Compton

11. Ένας σωλήνας ακτίνων X δουλεύει με τάση 100 kV (kiloVolt). Τα μήκη κύματος των εκπεμπόμενων ακτίνων X θα βρίσκονται στην περιοχή που προσδιορίζεται από την ανισότητα:
 α) $\lambda \geq 0,12 \text{ \AA}$, β) $\lambda \leq 0,12 \text{ \AA}$, γ) $\lambda \leq 1,2 \text{ \AA}$, δ) $\lambda \geq 2,4 \text{ \AA}$.
12. Η σκεδαζόμενη ΗΜ ακτινοβολία στο φαινόμενο Compton έχει μήκος κύματος σε σχέση με την αρχική:
 α) μεγαλύτερο ή ίσο, β) μικρότερο ή ίσο, γ) πάντα ίσο,
 δ) μεγαλύτερο ή μικρότερο ανάλογα με τη μάζα του σκεδάζοντος σωματιδίου.
- ✓ 13. ΗΜ ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 4,8 \times 10^{-2} \text{ \AA} = 2\lambda_c$ υφίσταται σκέδαση από ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που σκεδάζεται σε γωνία 60° θα είναι ίσο με:
 α) $\lambda' = 0,6 \text{ \AA}$, β) $\lambda' = 6 \text{ \AA}$, γ) $\lambda' = 0,06 \text{ \AA}$, δ) $\lambda' = 4,8 \text{ \AA}$.
- ✓ 14. Η ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση Compton του προηγούμενου προβλήματος θα είναι ίση με:
 α) 1,5 MeV, β) 1 MeV, γ) 0,5 MeV, δ) 0,3 MeV.
15. Ένα φωτόνιο με μήκος κύματος ίσο με το διπλάσιο του μήκους κύματος Compton του ηλεκτρονίου έχει ισοδύναμη μάζα μ ίση με:
 α) $2m$, β) $m/2$, γ) m , δ) $4m$.
 όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου.

Διαστατική ανάλυση

16. Οι φυσικές διαστάσεις της φασματικής έντασης J είναι ίσες με:
 α) MT^{-3} , β) L^2MT^{-1} , γ) L^2MT^{-2} , δ) MT^{-2} .
17. Μέσα στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής ο μοναδικός συνδυασμός των ποσοτήτων f , kT και c που έχει διαστάσεις φασματικής έντασης είναι ο:
 α) f^2kT/c^3 , β) f^2kT/c , γ) f^2kT/c^2 , δ) fkT/c .

18. Μέσα στο πλαίσιο της θεωρίας του Planck για το μέλαν σώμα η ολική ένταση I της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα σώμα θερμοκρασίας T θα είναι αναγκαστικά μια συνάρτηση της μορφής $I = f(kT, c, \hbar)$ και επομένως η εξάρτηση του I από τα kT , c και \hbar θα προσδιορίζεται –με ελευθερία μιας αριθμητικής σταθεράς– από καθαρά διαστατικές απαιτήσεις. Η εξάρτηση αυτή θα έχει τη μορφή:
- α) $I \sim (kT)^4 / \hbar^2 c^3$, β) $I \sim (kT)^4 / \hbar c$,
 γ) $I \sim (kT)^3 / \hbar^2 c^3$, δ) $I \sim (kT)^4 / \hbar^3 c^2$.
19. Αν ζούσαμε σε έναν διδιάστατο κόσμο, η εξάρτηση της ολικής έντασης I από τη θερμοκρασία θα είχε τη μορφή:
- α) $I \sim T^2$, β) $I \sim T$, γ) $I \sim T^3$, δ) $I \sim T^4$.
- ✓ 20. Σε έναν υποθετικό κόσμο, η σταθερά του Planck έχει τριπλάσια τιμή από ό,τι στον δικό μας (δηλαδή $\hbar' = 3\hbar$) ενώ η ταχύτητα του φωτός είναι τρεις φορές μικρότερη (δηλαδή $c' = c/3$). Για μια δεδομένη θερμοκρασία η ένταση της θερμικής ακτινοβολίας σε αυτόν τον κόσμο θα είναι:
- α) 3-πλάσια από ό,τι στον δικό μας, β) εννιαπλάσια,
 γ) 3 φορές μικρότερη, δ) 27 φορές μεγαλύτερη.

B: Ασκήσεις και προβλήματα

Μέλαν σώμα

- ✓ 1. Χρησιμοποιήστε τον νόμο των Stefan-Boltzmann –με $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ – για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του μεγάλου «ματιού» της ηλεκτρικής σας κουζίνας όταν δουλεύει σε πλήρη ισχύ. Πάρτε ως μια εύλογη τιμή αυτής της ισχύος την $P \simeq 1 \text{ kW}$ –όλες οι ηλεκτροβόρες οικιακές συσκευές έχουν ισχύ της τάξης του ενός έως τριών kW– και διαλέξτε εσείς την τιμή της ακτίνας του ματιού. Το αποτέλεσμα σας θα είναι εντάξει αν δίνει μια λογική τιμή για τη θερμοκρασία του ματιού. Δίνει;
2. Παίρνοντας την τιμή του σ από κάποιο βιβλίο ίσως κάνετε λάθος και γράψατε $\sigma = 5,67 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Μπορείτε να επικαλεστείτε ένα κοινό εμπειρικό δεδομένο για να ελέγξετε αν αυτός ο αριθμός είναι όντως ο σωστός ή όχι;
3. Κάποιος συνάδελφός σας –που έχει «μπερδευτεί» με τα συστήματα μονάδων που χρησιμοποιούμε (cgs ή mks)– γράφει τον νόμο του Wien στη μορφή

$$\lambda_{\max}(\text{m}) = \frac{0,3}{T(\text{K})}$$

ενώ ένας άλλος –που έχει «διαποτιστεί» με την ιδέα ότι στην κβαντική φυσική δουλεύουμε περισσότερο με \AA παρά με cm ή m– παρασύρεται και γράφει τον ίδιο τύπο ως

$$\lambda_{\max}(\text{\AA}) = \frac{0,3}{T(\text{K})}.$$

Μπορείτε να τους πείσετε –με δεδομένα της κοινής εμπειρίας– ότι οι τύποι τους (ιδίως ο δεύτερος) είναι αριθμητικά τελείως λανθασμένοι;

- ✓ 4. Όσο και αν σας φαίνεται «τρελό», η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου –αυτού του τόσο μακρινού αντικειμένου– μπορεί να «μετρηθεί» με εύλογη ακρίβεια επί τη βάσει των ακόλουθων δεδομένων της κοινής εμπειρίας σε συνδυασμό με τον νόμο $I = \sigma T^4$ και τη γνωστή τιμή του σ ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$).

Αδωμένο 1: Το ηλιακό θερμοσίφωνο δουλεύει! Και κάνει περίπου την ίδια δουλειά (σε κάπως περισσότερο χρόνο) με την αντίστοιχη ηλεκτρική συσκευή που έχει ισχύ –όπως όλες οι ηλεκτροβόρες οικιακές συσκευές– της τάξης των 2-3 kW. Η ηλιοσυλλεκτική επιφάνεια του ηλιακού είναι, βεβαίως, της τάξης του 1 m^2 .

Αδωμένο 2: Ο ηλιακός δίσκος –περίπου ίδιος με τον δίσκο του φεγγαριού– καλύπτεται (βεβαιωθείτε μόνοι σας γι' αυτό) από ένα αντικείμενο (π.χ., τμήμα ενός δακτύλου μας) μήκους 1 cm στο άκρο του τεντωμένου χεριού μας, δηλαδή σε απόσταση ενός μέτρου από το μάτι μας.

Με βάση τα δύο αυτά δεδομένα υπολογίστε –ή, έστω, *εκτιμήστε*– τη θερμοκρασία της ηλιακής επιφάνειας.

5. Δεδομένου ότι η ζωή στη Γη είναι προϊόν μιας μακραίωνης εξελικτικής προσαρμογής στο περιβάλλον –του οποίου κεντρικό στοιχείο είναι το ηλιακό φως (ως πηγή ενέργειας αλλά και «πληροφορίας» για τον γύρω κόσμο)– δεν είναι παράλογο να υποθέσουμε ότι οι γήινοι οργανισμοί «συντονίστηκαν» βαθμιαία με τον Ήλιο, έτσι ώστε να αξιοποιούν –π.χ., μέσω της όρασης ή του μηχανισμού της φωτοσύνθεσης– την ενεργειακά πλουσιότερη περιοχή του φάσματός του. Στο κάτω-κάτω μόνο έτσι μπορεί να εξηγηθεί «φυσιολογικά» το αξιοθαύμαστο γεγονός ότι όλοι οι οργανισμοί «βλέπουν» στην ίδια περιοχή του φάσματος, με την οποία «συντονίζονται» επίσης όλα τα φωτοσυλλεκτικά μόρια (π.χ., η χλωροφύλλη) του φυτικού βασιλείου.

Εκμεταλλευτείτε τους παραπάνω συλλογισμούς για να εκτιμήσετε –σε συνδυασμό με τον τύπο $\lambda_{\text{max}} (\text{cm}) = 0,3/T$ – τη θερμοκρασία της ηλιακής επιφάνειας. Συμφωνεί χονδρικά το αποτέλεσμά σας με εκείνο του προηγούμενου προβλήματος;

6. Αν υποθεθεί ότι η ανακλαστικότητα της γήινης επιφάνειας στο ηλιακό φως είναι πρακτικά μηδενική (το οποίο αληθεύει μόνο ως πρώτη προσέγγιση), τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση θερμοκρασία της Γης –στην πραγματικότητα, *οποιοδήποτε πλανήτη*– θεωρώντας ότι επανεκπέμπει το ίδιο ποσόν ενέργειας που απορροφά από τον ήλιο σε άλλη περιοχή του φάσματος. Γράψτε την εξίσωση που εκφράζει αυτό το ενεργειακό ισοζύγιο και δείξτε βάσει αυτής ότι η μέση θερμοκρασία της Γης (T_{Γ}) θα δίνεται από τον τύπο

$$T_{\Gamma} = T_{\text{H}} \sqrt{\frac{R_{\text{H}}}{2r_{\Gamma-\text{H}}}}$$

όπου T_{H} ($\simeq 5.800 \text{ K}$) η θερμοκρασία του Ήλιου, R_{H} η ακτίνα του και $r_{\Gamma-\text{H}}$ η απόσταση Γης-Ήλιου. Μπορείτε να βρείτε την αριθμητική τιμή αυτού του αποτελέσματος χωρίς να καταφύγετε σε ένα βιβλίο αστρονομίας για τις τιμές των R_{H} και $r_{\Gamma-\text{H}}$; Θεωρείτε λογικό το αποτέλεσμα που βρήκατε;

7. Επικαλεστείτε τον τύπο του Planck

$$J(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1}$$

για να δείξετε ότι για $T_1 > T_2$ είναι πάντα

$$J(f, T_1) > J(f, T_2)$$

για κάθε συχνότητα f . Το οποίο σημαίνει –μεταξύ άλλων– ότι οι γραφικές παραστάσεις των φασματικών κατανομών για δύο διαφορετικές θερμοκρασίες ουδέποτε τέμνονται. Εκείνη που αντιστοιχεί στο ψυχρότερο σώμα είναι παντού χαμηλότερη από την άλλη. Θεωρείτε εύλογο αυτό το αποτέλεσμα;

8. Δείξτε ότι ο τύπος του Wien για το λ_{\max} –και ειδικότερα η αντίστροφη εξάρτηση από τη θερμοκρασία– προκύπτει με καθαρά διαστατικά επιχειρήματα. Παρουσιάστε τα.
- ✓ 9. Δεδομένου ότι οι πειραματικοί προτιμούν (και έχουν το λόγο τους) να μετράνε μήκη κύματος αντί συχνοτήτων, οι εμπειρικές καμπύλες για τη φασματική κατανομή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος αφορούν περιοχές μικρών κύματος και όχι συχνότητας. Αφού μετατρέψετε την κατανομή ως προς τις συχνότητες σε κατανομή ως προς τα μήκη κύματος, βρείτε κατόπιν τη θέση του μεγίστου της και βεβαιωθείτε ότι ισχύει ο νόμος του Wien

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθερά},$$

προσδιορίζοντας ταυτόχρονα και την τιμή της σταθεράς. Δείξτε κατόπιν ότι αν προσδιορίζαμε το μέγιστο της ακτινοβολίας από την κατανομή ως προς τις συχνότητες θα βρίσκαμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Πώς εξηγείτε αυτό το «περίεργο» γεγονός;

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

- ✓ 10. Ένα από τα εντυπωσιακά χαρακτηριστικά του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι ο πρακτικά μηδενικός χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην πρόσπτωση της φωτεινής δέσμης στην φωτοκάθοδο και την εξαγωγή των ηλεκτρονίων. Ακόμα και με πολύ ασθενή δέσμη τα φωτοηλεκτρόνια εμφανίζονται σχεδόν ακαριαία ($\tau < 10^{-9}$ sec). Για να δείτε την αποτυχία της κλασικής θεωρίας και σε αυτό το ζήτημα, εκτιμήστε τον χρόνο αναμονής για να αποσπαστεί ένα ηλεκτρόνιο από ένα άτομο που εκτίθεται σε μια φωτεινή δέσμη εντάσεως, ας πούμε, όσης και μιας λάμπας των 100 W σε απόσταση 1 m. Θεωρήστε το άτομο ως φωτοσυλλέκτη που απορροφά όλη την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια που πέφτει πάνω στη διατομή του.
11. Θεωρήστε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο –ας πούμε ένα από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου που χρησιμοποιείται σε ένα φωτοηλεκτρικό πείραμα– το οποίο εκτίθεται στη δύναμη $F = -eE_0 \cos \omega t$ του ηλεκτρικού πεδίου $E(t) = E_0 \cos \omega t$, του ΗΜ κύματος (συχνότητας ω) που προσπίπτει στην επιφάνεια του μετάλλου. Λύστε την εξίσωση κίνησης του Νεύτωνα $m\dot{v} = F(t)$ γι' αυτό το πρόβλημα –με

$v_0 = 0$ για λόγους απλότητας— και δείξτε ότι ύστερα από χρόνο t η κινητική ενέργεια $K(t)$ του ηλεκτρονίου θα δίνεται από τον τύπο

$$K(t) = \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{2m\omega^2} \sin^2 \omega t.$$

Συζητήστε, με βάση το αποτέλεσμα αυτό, τον κλασικό μηχανισμό εξαγωγής ηλεκτρονίων από το μέταλλο και επιβεβαιώστε το βασικό του συμπέρασμα. Ότι δηλαδή η εξαγωγή θα γίνει οπωσδήποτε, αρκεί η ένταση (δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο) του προσπίπτοντος κύματος να είναι αρκετά ισχυρή, παρά το γεγονός ότι η ημιτονοειδής μεταβολή της δύναμης που ασκείται πάνω στο ηλεκτρόνιο τού δίνει και του αφαιρεί ενέργεια με έναν περιοδικό τρόπο.

12. Το έργο ιοντισμού του ατόμου του υδρογόνου —δηλαδή το έργο που απαιτείται για να αποσπαστεί από το άτομο το ηλεκτρόνιο του— είναι $W = 13,6 \text{ eV}$. Θα συμβεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο —δηλαδή *ιοντισμός* του ατόμου— αν πέσει πάνω του υπεριώδης ακτινοβολία μήκους κύματος 480 \AA ; Αν συμβεί, πόση θα είναι η ταχύτητα του εξαγόμενου ηλεκτρονίου;
13. Κάποιοι ισχυρίζεται ότι οι τυπικές ενέργειες των χημικών αντιδράσεων —δηλαδή οι ενέργειες που απαιτούνται για να γίνουν οι περισσότερες από αυτές— είναι της τάξεως των μερικών χιλιοστών του eV (meV). Μπορείτε να τον πείσετε ότι έχει άδικο; Το ίδιο ερώτημα αν ισχυρίζεται ότι οι ενέργειες αυτές είναι της τάξεως των χιλιάδων ηλεκτρονιοβόλτ.

Φαινόμενο Compton

- ✓ 14. Ένα φωτόνιο με $\lambda = \lambda_C$ πέφτει επάνω σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο και «ανακρούει» κατά 180° ($\theta = \pi$). Υπολογίστε την ορμή και την ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση και βεβαιωθείτε για την ορθότητα των αποτελεσμάτων σας κάνοντας τον κατάλληλο έλεγχο. Ποιος είναι αυτός;
- ✓ 15. Ένα φωτόνιο με $\lambda = \lambda_C/2$ υφίσταται σκέδαση Compton πάνω σε ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο. α) Υπολογίστε (συναρτήσκει των h, m και c) το μήκος κύματος, την ορμή, καθώς και την ενέργεια του φωτονίου που σκεδάζεται σε γωνία 120° . β) Υπολογίστε κατόπιν τη γωνία σκέδασης, την ορμή και την ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση.
16. Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση πειράματος Compton κατά την οποία το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος φωτονίου έχει την τυχούσα τιμή $\lambda = k\lambda_C$, όπου k ένας τυχόν αδιάστατος αριθμός, και η γωνία σκέδασης θ έχει επίσης τυχούσα τιμή. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και ενέργειας του φαινομένου Compton για να υπολογίσετε τα μεγέθη λ' , p'_γ , ϵ'_γ (=μήκος κύματος, ορμή και ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου) καθώς και τα ϕ , p και E (= γωνία σκέδασης, ορμή και ενέργεια του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου). Δείξτε συγκεκριμένα ότι θα είναι

Για το φωτόνιο:

$$\lambda' = \lambda_C(1 + k - \cos \theta), \quad p'_\gamma = \frac{mc}{1 + k - \cos \theta}, \quad \epsilon'_\gamma = \frac{mc^2}{1 + k - \cos \theta}$$

Για το ηλεκτρόνιο:

$$\tan \phi = \frac{k}{1+k} \frac{1}{\tan(\theta/2)}, \quad K \equiv E - mc^2 = mc^2 \frac{1 - \cos \theta}{k(1+k - \cos \theta)}$$

$$p = mc \frac{1 - \cos \theta}{k(1+k - \cos \theta)} \sqrt{\frac{k^2}{\tan^2(\theta/2)} + (k+1)^2}$$

ενώ για το φωτόνιο πριν τη «σύγκρουση» είναι, βεβαίως,

$$\lambda = k\lambda_C, \quad p_\gamma = \frac{mc}{k}, \quad \epsilon_\gamma = \frac{mc^2}{k}.$$

[Σημειώστε ότι επειδή τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρονίου πριν τη σύγκρουση είναι δεδομένα και πάντα τα ίδια (ορμή=μηδέν και ενέργεια=ενέργεια ηρεμίας= mc^2) επιλέξαμε να μην χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό με το φωτόνιο, δηλαδή τα άτονα μεγέθη για πριν τη σύγκρουση και τα τονούμενα για μετά.]

Βεβαιωθείτε ότι οι παραπάνω γενικοί τύποι αναπαράγουν τα αποτελέσματα των προηγούμενων δύο προβλημάτων και εφαρμόστε τους μετά για να προβλέψετε τα αποτελέσματα και στις ακόλουθες δύο ειδικές περιπτώσεις:

α) $k = 1$, $\theta = \pi/2$, β) $k = 2$, $\theta = 2\pi/3$.

17. Δείξτε ότι για κάθε δεδομένο μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου –δηλαδή για κάθε δεδομένο k – υπάρχει μια συγκεκριμένη γωνία εκπομπής του δευτερογενούς φωτονίου για την οποία το ηλεκτρόνιο εκτινάσσεται υπό γωνία 90° ως προς το φωτόνιο. Δείξτε συγκεκριμένα ότι αυτή η ειδική γωνία θ προσδιορίζεται από την απλούστατη σχέση

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{2}}.$$

Συμφωνεί αυτό το γενικό αποτέλεσμα με εκείνο του Προβλήματος 15;

18. Συμπλήρωμα θεωρίας: Απόδειξη του κλασικού τύπου των Rayleigh-Jeans για το μέλαν σώμα

- α) Με αφετηρία την έκφραση $u(x) = \sin kx$, $k = n\pi/L$, ενός στάσιμου κύματος σε μια μονοδιάστατη χορδή μήκους L και τη –μάλλον γνωστή– γενίκευσή του, $u(x, y, z) = \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z$ – $k_x = n_x \pi/L$, $k_y = n_y \pi/L$, $k_z = n_z \pi/L$, $n_{x,y,z} = 1, 2, \dots \infty$ – για ένα στάσιμο κύμα μέσα σε ένα κυβικό κουτί πλευράς L , δείξτε ότι ο αριθμός των στάσιμων ΗΜ κυμάτων μέσα στο κουτί, ανά μονάδα όγκου και συχνότητας, θα δίνεται από τον τύπο

$$\rho(f) = \frac{8\pi}{c^3} f^2. \quad (1)$$

Συνδυάστε την (1) με το *θεώρημα της ισοκατανομής* –που λέει ότι σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί μια μέση ενέργεια $kT/2$ – για να δείξετε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας $u(f, T)$ στο εσωτερικό μιας κοιλότητας μέλανος σώματος θα γράφεται ως

$$u_{\text{cl}}(f, T) = \rho_{\text{HM}}(f) \cdot \bar{E}_{\text{cl}} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \cdot kT, \quad (2)$$

όπου $\bar{E}_{\text{cl}} = 2 \times (kT/2) = kT$ η μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα καθορισμένης συχνότητας, όπου ο παράγοντας δύο αντιπροσωπεύει τους δύο βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. (Λόγω της εγκάρσιας πόλωσής τους τα ΗΜ κύματα διαθέτουν δύο ακόμα βαθμούς ελευθερίας που έχει καθιερωθεί να μετρώνται χωριστά στον τύπο (2).)

- β) Για να περάσετε τώρα από τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $u(f, T)$ στη φασματική ένταση $J(f, T)$ –που είναι η πειραματικά ενδιαφέρουσα ποσότητα– θα χρειαστείτε και τη σχέση

$$J(f, T) = u(f, T) \cdot \frac{c}{4}$$

την οποία καλείστε αν όχι να αποδείξετε (που δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο) τουλάχιστον όμως να σχολιάσετε από φυσικής πλευράς και να την εφαρμόσετε μετά για να βεβαιωθείτε ότι το τελικό σας αποτέλεσμα συμπίπτει με τον τύπο των Rayleigh-Jeans που δώσαμε στο κείμενο.

- γ) Μπορείτε να αποδείξετε με τον ίδιο τρόπο –αλλά με αφετηρία τη συνθήκη κβάντωσης $E_n = nhf$ – ότι και ο τύπος του Planck είναι επίσης σωστός;

C: Υπολογιστικό εργαστήριο

1. Χρησιμοποιήστε τη *Mathematica* για να κατασκευάσετε τις φασματικές καμπύλες του Σχήματος 1.2 για τις δεδομένες τιμές θερμοκρασίας $T_1 = 300 \text{ K}$ και $T_2 = 600 \text{ K}$. Κοιτάζοντας και μόνο αυτές τις καμπύλες –π.χ., τη «μεγαλύτερη» από αυτές– μπορείτε να πείτε πόση περίπου θα είναι η ολική εκπεμπόμενη ένταση σε W/m^2 ;
2. Χρησιμοποιήστε ξανά τη *Mathematica* για να απαντήσετε σε ένα ερώτημα που σίγουρα θα σας γεννήθηκε κάποια στιγμή: Τι ποσοστό της ενέργειάς του εκπέμπει ο Ήλιος στο ορατό; Και αυτό που απομένει, πώς κατανέμεται μεταξύ υπέρυθρου και υπεριώδους;
3. Ορίστε στη *Mathematica* τις συναρτήσεις $p(T)$, $q(T)$ και $r(T)$ που δίνουν τα ποσοστά της ακτινοβολούμενης ισχύος στο ορατό, το υπέρυθρο και το υπεριώδες αντίστοιχα, από ένα σώμα θερμοκρασίας T ($p + q + r = 1$, βεβαίως). Κατασκευάστε κατόπιν έναν πίνακα με τις τιμές αυτών των συναρτήσεων, για T από 1.000 έως 10.000 βαθμούς Κέλβιν, με βήμα $\Delta T = 500 \text{ K}$. Σχεδιάστε επίσης τη συνάρτηση $p(T)$ στο ίδιο διάστημα και βρείτε τη θερμοκρασία στην οποία γίνεται μέγιστη.
4. Σε κατάλληλες αδιάστατες μεταβλητές η φασματική κατανομή ενός μέλανος σώματος ως προς τις συχνότητες, εκφράζεται μέσω της συναρτήσεως $f(x) = x^3/(e^x - 1)$ ενώ ως προς τα μήκη κύματος η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η $g(x) = x^5/(e^x - 1)$. Ζητήστε από τη *Mathematica* να σας υπολογίσει τα ολοκληρώματα αυτών των συναρτήσεων από μηδέν έως άπειρο καθώς και τις θέσεις των μεγίστων τους, που απαιτούνται για την εξαγωγή των νόμων Stefan-Boltzmann και Wien με βάση τον τύπο του Planck.



Ο ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΣ ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρακολουθήσαμε τη διαδικασία μέσα από την οποία ανατράπηκε η κλασική αντίληψη για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και εισήχθη η υπόθεση του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού του φωτός. Όπως είδαμε, αυτή η ανατροπή έγινε σε δύο στάδια. Στο πρώτο, ο Planck, με αφετηρία τα φασματοσκοπικά δεδομένα για το μέλαν σώμα, διατύπωσε την υπόθεση ότι οι ενεργειακές καταστάσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα σε μια κοιλότητα είναι κβαντωμένες. Ο Einstein ήταν εκείνος που κατάλαβε (με βάση και τα δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου) ότι ο μόνος τρόπος για να εξηγηθεί αβίαστα η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ήταν να του αποδοθεί και σωματιδιακός χαρακτήρας δίπλα στον κυματικό. Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι η ίδια ακριβώς πορεία ακολουθήθηκε και για τα σωματίδια, δηλαδή την άλλη θεμελιώδη οντότητα της κλασικής φυσικής. Και εδώ, σε μια πρώτη φάση, με αφετηρία πάλι τα φασματοσκοπικά δεδομένα, διαπιστώθηκε ότι οι ενεργειακές καταστάσεις των ηλεκτρονίων μέσα στα άτομα είναι αναγκαστικά κβαντωμένες. Αυτή ήταν η συνεισφορά του Bohr. Αργότερα, ο de Broglie, ακολουθώντας τα χνάρια του Einstein, μπόρεσε να δει ότι πάλι ο μοναδικός φυσιολογικός τρόπος για να εξηγηθεί η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων των ηλεκτρονίων ήταν να τους αποδοθούν και κυματικές ιδιότητες δίπλα στις σωματιδιακές.

Έτσι η όλη πορεία της φυσικής στην πρώτη εικοσαετία του περασμένου αιώνα μπορεί να παρομοιαστεί με τη διάνοιξη δύο παράλληλων σηράγγων από τις δύο πλευρές ενός βουνού. Στη μια πλευρά ήταν τα σωματίδια και στην άλλη τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Δηλαδή οι δύο ασυμφιλίωτες οντότητες της κλασικής φυσικής.

Όταν και οι δύο σήραγγες ολοκληρώθηκαν, φάνηκε πια καθαρά ότι η κλασική διχοτόμηση του κόσμου σε σωματίδια και πεδία δεν ήταν σωστή. Έτσι το δραματικά καινούργιο στοιχείο που έφερε στο φως η πειραματική

έρευνα του μικρόκοσμου, συνοψίζεται στην περίφημη πια *αρχή του κυματοσωματιδιακού διΪσμού*, η οποία εκτείνεται σε όλη τη φυσική πραγματικότητα και εκφράζεται ποσοτικά με τις σχέσεις Einstein - de Broglie

$$\blacktriangleright \quad E = hf, \quad p = h/\lambda \quad (\text{A})$$

ή, ισοδύναμα, με τις

$$\blacktriangleright \quad f = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad (\text{B})$$

όπου η μορφή (A) περιγράφει τη σωματιδιακή φύση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων –και ειδικότερα του φωτός– ενώ η μορφή (B) την κυματική φύση των σωματιδίων και ειδικότερα των ηλεκτρονίων.

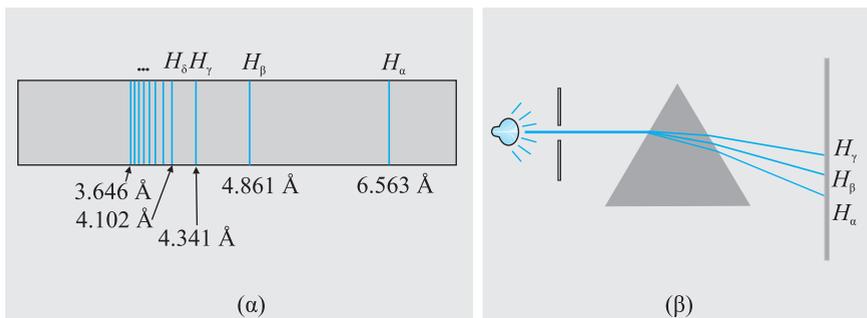
Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρακολουθήσαμε τη διάνοιξη της σήραγγας από τα κύματα (ηλεκτρομαγνητικά) προς τα σωματίδια. Σε τούτο εδώ, θα παρακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία που οδηγεί από τα σωματίδια στα κύματα. Το κεφάλαιο χωρίζεται φυσιολογικά σε τρία μέρη. Στο πρώτο (§ 1 και 2) θα εξετάσουμε τα δύο βασικά «μυστήρια» του ατομικού μικρόκοσμου (τους νόμους των ατομικών φασμάτων και το πρόβλημα της ατομικής σταθερότητας), στο δεύτερο (§ 3) θα παρουσιάσουμε την ιδιοφυή προσπάθεια του Bohr να τα εξηγήσει (*θεωρία του Bohr*) και στο τρίτο (§ 4) θα δούμε ότι η πιο φυσιολογική εξήγηση της ίδιας της θεωρίας του Bohr είναι η *υπόθεση του de Broglie*: η αρχή του κυματοσωματιδιακού διΪσμού της ύλης.

1. Το μυστήριο των ατομικών φασμάτων

1.1. Οι εμπειρικοί νόμοι: Ο τύπος του Balmer και η συνδυαστική αρχή

Η φασματοσκοπική έρευνα των ατομικών (ή μοριακών) αερίων είχε πραγματοποιήσει σημαντικές προόδους ήδη από τα μέσα του 19ου αιώνα. Βέβαια, η δουλειά εδώ ήταν πολύ πιο δύσκολη από ό,τι στη θερμική ακτινοβολία των στερεών σωμάτων, γιατί τα ατομικά φάσματα είναι *γραμμικά* –δηλαδή περιέχουν μόνο ορισμένες *διάκριτες* «φασματικές γραμμές» και καμία *άλλη*– και, επιπλέον, διαφέρουν τρομερά από άτομο σε άτομο. Έτσι η παγκοσμιότητα που δίνει μια τόσο ξεχωριστή θέση στο φάσμα του μέλανος σώματος δεν υπάρχει πια. Εντούτοις, ακόμα και τα ατομικά φάσματα, παρά τη χαοτική τους ποικιλία, διέπονται από έναν *καθολικό εμπειρικό νόμο* μέσω του οποίου εκδηλώνεται –όπως θα δούμε αργότερα– με εκπληκτική αμεσότητα το φαινόμενο της κβάντωσης των ατομικών καταστάσεων.

Το πρώτο βήμα προς την ανακάλυψη αυτού του γενικού εμπειρικού νόμου έγινε από τον Balmer, έναν Σουηδό δάσκαλο, ο οποίος προσπάθησε να βρει έναν εμπειρικό τύπο που να αποδίδει πιστά τις φασματικές γραμμές του ατόμου του υδρογόνου (βλ. Σχήμα 2.1), το οποίο, όντας το απλούστερο από τα



ΣΧΗΜΑ 2.1: (α) Το ορατό μέρος του φάσματος του ατόμου του υδρογόνου (σειρά Balmer).

(β) Μια στοιχειώδης πειραματική διάταξη για τη λήψη ενός φάσματος. Το φως που εκπέμπεται από την πηγή του διεγερμένου αερίου –π.χ. μια λυχνία εκκενώσεως– περνάει μέσα από μια στενή σχισμή (γιατί;) και εν συνεχεία μέσα από ένα πρίσμα που το αναλύει στα συνιστώντα χρώματα τα οποία αποτυπώνονται ως *λεπτές φωτεινές γραμμές* πάνω σε ένα κατάλληλο «πέτασμα». Στο παραπάνω σχήμα υπάρχει σκόπιμα ένα λάθος. Βρείτε το.

στοιχεία, είχε μελετηθεί εξαντλητικά. Ο τύπος που βρήκε ο Balmer (όπως γενικεύτηκε αργότερα και από άλλους ερευνητές) έχει την ακόλουθη απλή μορφή

$$f = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2.1)$$

όπου το f παριστάνει τις παρατηρούμενες φασματικές συχνότητες, τα n και m είναι *ακέραιοι αριθμοί*, και το $R = 3,27 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ μια εμπειρική παράμετρος γνωστή ως *σταθερά του Rydberg*.

Η εκπληκτική εμπειρική επιτυχία του τύπου του Balmer έστρεψε γρήγορα τη φασματοσκοπική έρευνα προς τη σωστή κατεύθυνση. Έτσι διαπιστώθηκε σύντομα ότι και οι φασματικές συχνότητες άλλων στοιχείων μπορούν να γραφούν σε μια ανάλογη με τη (2.1) μορφή. Δηλαδή ως

$$f = f_m - f_n, \quad (2.2)$$

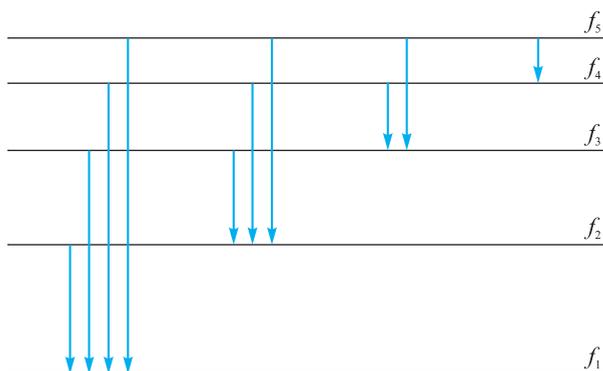
όπου $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ είναι μια κατάλληλη ακολουθία *φασματικών όρων* χαρακτηριστική του κάθε ατόμου. (Για το άτομο του υδρογόνου θα είναι προφανώς $f_n = R/n^2$.) Ο εμπειρικός νόμος που εκφράζεται με τη (2.2) είναι γνωστός ως η *συνδυαστική αρχή* και διατυπώνεται ως ακολούθως:

Συνδυαστική αρχή: Το φάσμα κάθε στοιχείου χαρακτηρίζεται πλήρως από μια ακολουθία $f_1 \dots f_n \dots$ φασματικών όρων τέτοιων ώστε: κάθε φασματική γραμμή μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φασματικών όρων.

Η συνδυαστική αρχή επιδέχεται μια πολύ παραστατική γραφική απεικόνιση. Η ακολουθία των φασματικών όρων του κάθε ατόμου παριστάνεται από μια διαδοχή οριζόντιων γραμμών που κόβουν μια (νοητή) κατακόρυφη κλίμακα συχνοτήτων στις κατάλληλες τιμές f_1, \dots, f_n, \dots . Κατά συνέπεια οι φασματικές συχνότητες $f = f_m - f_n$ θα παριστάνονται με κατακόρυφα βέλη, που συνδέουν ανά δύο τις οριζόντιες γραμμές (Σχ. 2.2).

Αν και είναι προφανές, ας σημειωθεί επίσης ότι οι φασματικοί όροι $f_1 \dots f_n \dots$ —οι οποίοι, βεβαίως, έχουν διαστάσεις συχνότητας— δεν περιλαμβάνονται οι ίδιοι στις παρατηρούμενες φασματικές συχνότητες και, επομένως, θα πρέπει να θεωρηθούν μόνο ως ένα «εργαλείο» υπολογισμού αυτών των συχνοτήτων που το φυσικό του περιεχόμενο θα γίνει εμφανές λίγο αργότερα. Διαπιστώθηκε ακόμα ότι ενώ κάθε φασματική γραμμή μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φασματικών όρων, το αντίθετο δεν συμβαίνει πάντα. Υπάρχουν δηλαδή και διαφορές $f_m - f_n$ οι οποίες δεν εμφανίζονται στο φάσμα. Όμως αυτές οι «απαγορευμένες διαφορές» διέπονται από ορισμένους απλούς κανόνες επιλογής, που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε από πριν τις απαγορευόμενες περιπτώσεις από τις επιτρεπόμενες. Οι κανόνες αυτοί, όπως και οι ίδιοι οι φασματικοί όροι θα συζητηθούν αργότερα, όταν θα υφίστανται οι προϋποθέσεις για τη φυσική κατανόησή τους.

Αξίζει επίσης να τονίσουμε το πόσο σημαντική ήταν η απλοποίηση που έφερε στη φασματοσκοπία η ανακάλυψη της συνδυαστικής αρχής. Αν γνωρίζουμε n φασματικούς όρους, τότε με αυτούς μπορούμε να περιγράψουμε $n(n-1)/2$ φασματικές γραμμές, δηλαδή όσοι οι συνδυασμοί n πραγμάτων



ΣΧΗΜΑ 2.2: Η συνδυαστική αρχή. Οι παρατηρούμενες συχνότητες σε ένα γραμμικό φάσμα μπορούν πάντα να γραφούν ως διαφορά δύο φασματικών όρων που δείχνονται στο σχήμα ως οριζόντιες γραμμές, οπότε οι παρατηρούμενες συχνότητες θα είναι τα κατακόρυφα βέλη που τις συνδέουν ανά δύο.

ανά δύο. Π.χ., από $n = 50$ φασματικούς όρους παίρνουμε 1225 φασματικές γραμμές! Από το Σχήμα 2.2 φαίνεται επίσης αμέσως ότι *το μήκος κάθε κατακόρυφης γραμμής ισούται πάντα με το άθροισμα ή τη διαφορά του μήκους δύο άλλων*. Το οποίο συνεπάγεται ότι:

Το άθροισμα ή η διαφορά δύο παρατηρούμενων συχνοτήτων θα είναι επίσης μια παρατηρούμενη συχνότητα.

Αυτός είναι ένας εμπειρικός νόμος που μπορεί να διαπιστωθεί πολύ εύκολα, γι' αυτό και η συνδυαστική αρχή ανακαλύφθηκε και πρωτοδιατυπώθηκε σε αυτή τη μορφή. Ας προσθέσουμε τέλος ότι, σύμφωνα με τον τύπο του Balmer, η ακολουθία των φασματοσκοπικών όρων για το άτομο του υδρογόνου θα δίνεται από τον τύπο

$$f_n = \frac{R}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad R = 3,27 \times 10^{15} \text{ Hz.}$$

Αυτό το εμπειρικό αποτέλεσμα θα παίξει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της θεωρίας του Bohr, όπως θα δούμε σε λίγο.

1.2. Η κλασική φυσική αδυνατεί να εξηγήσει τη συνδυαστική αρχή

Σύμφωνα με τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό, όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί μια επιταχυνόμενη κίνηση, θα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που το φάσμα της εξαρτάται από το είδος της κίνησης ως εξής:

α) *Περιοδική κίνηση*: Σε αυτή την περίπτωση τόσο η πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r}, t)$ όσο και η ρευματική πυκνότητα $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ που δημιουργούνται από την κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου είναι *περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου* με περίοδο ίση με την περίοδο της κίνησης. Σύμφωνα όμως με τη θεωρία των σειρών Fourier, κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μια σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων με κυκλικές συχνότητες $\omega_n = n\omega$, όπου $\omega = 2\pi/T$ είναι η θεμελιώδης συχνότητα.^(*) Κάθε περιοδι-

^(*) Συγκεκριμένα, για κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με περίοδο T –δηλαδή $f(t+T) = f(t)$ – θα είναι

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

όπου $\omega = 2\pi/T$ και

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad (n \geq 1)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

κή κίνηση μπορεί δηλαδή να θεωρηθεί ως επαλληλία απλών αρμονικών ταλαντώσεων με συχνότητες ίσες με τα ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας. Έτσι, το φάσμα της ακτινοβολίας που οφείλεται σε μια περιοδική κίνηση θα είναι διάκριτο και συγκεκριμένα θα περιέχει μια θεμελιώδη συχνότητα και όλες τις ανώτερες αρμονικές της. Οι αρμονικές απουσιάζουν μόνο στην περίπτωση που η κίνηση είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση.

β) *Απεριοδική κίνηση*: Εδώ, τόσο το ρ όσο και το \mathbf{J} είναι *απεριοδικές συναρτήσεις του χρόνου* και, επομένως, η ανάλυσή τους κατά Fourier θα δώσει όλο το συνεχές των συχνοτήτων.^(*) Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, το φάσμα της ακτινοβολίας είναι αναγκαστικά συνεχές.

Αυτές οι δύο δυνατότητες εξακολουθούν προφανώς να ισχύουν και όταν έχουμε πολλά κινούμενα φορτία, όπως τα ηλεκτρόνια ενός υλικού. Αν όλα τα ηλεκτρόνια εκτελούν περιοδικές κινήσεις, με διαφορετικές εν γένει περιόδους, τότε το εκπεμπόμενο φάσμα θα είναι διάκριτο με ορισμένες θεμελιώδεις συχνότητες και τις αρμονικές τους. Αν η κίνηση όλων των ηλεκτρονίων είναι απεριοδική, τότε το φάσμα εκπομπής θα είναι συνεχές. Φυσικά, μπορεί να φανταστεί κανείς και την περίπτωση όπου ένα ποσοστό των ηλεκτρονίων εκτελεί περιοδική κίνηση και το υπόλοιπο απεριοδική. Το φάσμα θα αποτελείται τότε από ορισμένες διάκριτες συχνότητες και τις αρμονικές τους, επάνω σε ένα συνεχές φόντο.

Στην πραγματικότητα, όμως, μέσα στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής, μια καθαρά περιοδική κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου είναι, σε τελευταία ανάλυση, αδύνατη. Πράγματι, λόγω της ακτινοβολίας, το φορτισμένο σωματίδιο θα χάνει συνεχώς ενέργεια, οπότε το πλάτος της ταλάντωσής του θα μειώνεται αδιάκοπα και άρα η κίνησή του θα γίνει απεριοδική και το αντίστοιχο φάσμα συνεχές. Ωστόσο, ακόμα και αν παρακάμψει κανείς αυτό το πρόβλημα υποθέτοντας ότι, χάρις σε κάποιον μυστηριώδη μηχανισμό αλληλεπίδρασης με το άμεσο περιβάλλον τους, τα ηλεκτρόνια αναπληρώνουν τη χαμένη, λόγω της ακτινοβολίας, ενέργεια και διατηρούν τον περιοδικό χαρακτήρα της κίνησής τους, το αδιέξοδο εντούτοις παραμένει. Πράγματι, το βασικό συμπέρασμα της κλασικής ανάλυσης ότι στην περίπτωση του διάκριτου φάσματος μαζί με τις θεμελιώδεις συχνότητες θα εμφανίζονται και οι αρμονικές τους, δεν βρίσκει καμία απολύτως πειραματική επιβεβαίωση. Αντίθετα, το πειραματικό φάσμα διέπεται, όπως είδαμε, από μια ολότελα διαφορετική αρχή η οποία συνεπάγεται, μεταξύ άλλων, ότι

^(*) Δηλαδή για μια μη περιοδική συνάρτηση $f(t)$ θα είναι

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega,$$

το οποίο σημαίνει ότι η $f(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής επαλληλία ημιτόνων και συνημιτόνων με όλες τις δυνατές συχνότητες.

το άθροισμα ή η διαφορά δυο παρατηρούμενων συχνοτήτων είναι πάλι μια παρατηρούμενη συχνότητα.

Η κλασική συνδυαστική αρχή –αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και εδώ τον ίδιο όρο– μας λέει τελειώς άλλο πράγμα. Συγκεκριμένα, ότι αν παρατηρήσουμε μια ορισμένη συχνότητα, σίγουρα θα υπάρχουν και οι αρμονικές της έστω και με αισθητά μειωμένη ένταση. Ο μόνος τρόπος για να συμβιβάσει κανείς την κλασική θεωρία με το αναμφισβήτητο γεγονός ότι *δεν υπάρχει ούτε ίχνος αρμονικών στο πειραματικό φάσμα*, είναι να δεχτεί ότι όλα τα ηλεκτρόνια εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με συχνοτήτες ίσες με τις παρατηρούμενες. Τότε όμως είναι σαν να εξηγούμε το άγνωστο διά του ... αγνώστου. Να ανάγουμε δηλαδή ένα μυστήριο σε ένα άλλο και μάλιστα πιο σκοτεινό από το πρώτο.

Πράγματι, δεδομένου ότι το πλήθος των φασματικών γραμμών είναι πολύ μεγάλο –και μπορεί να αυξηθεί ακόμα περισσότερο, ανεβάζοντας τη θερμοκρασία και τη διακριτική ικανότητα του φασματοσκοπίου μας–, για να εξηγήσει κανείς πώς είναι δυνατόν τα ηλεκτρόνια ταυτόσημων ατόμων να ταλαντεύονται με μια τέτοια χασοτική ποικιλία συχνοτήτων πρέπει να επινοήσει καθαρά συνωμοτικούς μηχανισμούς. Και από ό,τι γνωρίζουμε μέχρι τώρα, η φύση δεν δουλεύει με αυτόν τον τρόπο.

Με την ανάλυση των φασματοσκοπικών δεδομένων προστίθεται λοιπόν μια ακόμα μαρτυρία ενάντια στην κλασική αντίληψη του κόσμου. Και παρ' όλο που η καταδικαστική απόφαση θα αργήσει ακόμα, δεν κρύβεται πια το μυστικό ότι «κάτι σάπιο υπάρχει στο βασίλειο της ... κλασικής φυσικής».

2. Το μυστήριο της ατομικής σταθερότητας

2.1. Το ατομικό πλανητικό μοντέλο. Το πείραμα του Rutherford

Ήταν το πιο απίστευτο γεγονός που μου 'τυχε στη ζωή μου. Ήταν σχεδόν τόσο απίστευτο, όσο και το να βάλεις με μια οβίδα 15 ιντσών σε ένα φύλλο χαρτιού και να γυρίσει να σε χτυπήσει. Καθώς άρχισα να το σκέφτομαι, κατάλαβα ότι αυτή η οπισθοσκέδαση θα έπρεπε να οφείλεται σε μια μοναδική κρούση και, κάνοντας τους υπολογισμούς, είδα ότι ο μόνος τρόπος για να πάρει κανείς μια τέτοια τάξη μεγέθους ήταν να θεωρήσει ότι το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του ατόμου ήταν συγκεντρωμένο σε έναν μικροσκοπικό πυρήνα.

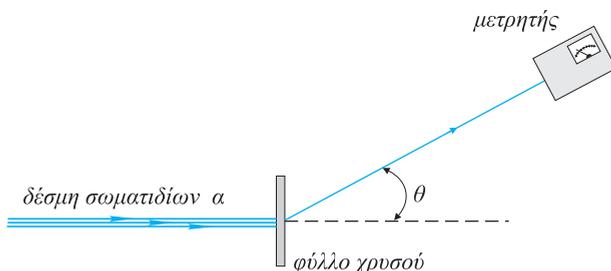
E. RUTHERFORD

Αν και η υπόθεση για την ατομική δομή της ύλης ήταν προς τα τέλη του 19ου αιώνα τελειώς ώριμη, εντούτοις το συγκεκριμένο μοντέλο του ατόμου παρέμενε ακόμη άγνωστο. Με την ανακάλυψη του ηλεκτρονίου από τον Thomson

το 1895 αρχίζει να διαφαίνεται ότι το άτομο αποτελείται από ηλεκτρόνια και ένα ίσο ποσό θετικού φορτίου που ο υλικός του φορέας ήταν ακόμα αντικείμενο εικασίας.

Ένα πιθανό ατομικό μοντέλο προτάθηκε από τον ίδιο τον Thomson και η βασική του ιδέα είναι ότι τα θετικά φορτία κατανέμονται σε μια διάχυτη μάζα, ένα είδος «ζελέ», που καταλαμβάνει όλο τον όγκο του ατόμου. Επάνω σε αυτό το «ζελέ» είναι «κολλημένα» τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια –όπως οι σταφίδες στο σταφιδόψωμο– με ελευθερία να εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Είναι αλήθεια ότι το μοντέλο του Thomson μας φαίνεται σήμερα τελείως απλοϊκό και, πράγματι, είναι. Όμως, για να μην χάνουμε την ιστορική προοπτική, ας θυμηθούμε ότι οι δικές μας γενιές έχουν κυριολεκτικά γαλουχηθεί με τη σύγχρονη *σωματιδιακή αντίληψη* της ύλης στο πλαίσιο της οποίας θεωρείται πια τελείως αυτονόητο ότι κάθε ανώτερη υλική δομή θα αποτελείται από μικρότερα σωματίδια, που συγκρατούνται πλάι-πλάι με τις αμοιβαίες τους δυνάμεις. Έτσι η ιδέα μιας διάχυτης μάζας μέσα στην οποία κινούνται άλλα σωματίδια (όπως στο μοντέλο του Thomson) μας φαίνεται σήμερα τόσο παράλογη όσο και ο διαβόητος αιθέρας.

Οι τεχνικές δυνατότητες για την πειραματική διερεύνηση της δομής του ατόμου δημιουργήθηκαν με την ανακάλυψη της ραδιενέργειας το 1894, και ειδικότερα των σωματιδίων α (πυρήνες ηλίου, όπως γνωρίζουμε σήμερα). Το σχετικό πείραμα έγινε από τους Geiger και Marsden στο εργαστήριο που διηύθυνε ο Rutherford και η βασική του ιδέα είναι η εξής: από μια ραδιενεργό πηγή παίρνουμε μια μονοενεργειακή δέσμη σωματιδίων α , ενέργειας μερικών MeV, και τη στέλνουμε να σκεδαστεί πάνω σε ένα πολύ λεπτό φύλλο χρυσού. Ένας μετρητής που μπορεί να τοποθετηθεί σε διάφορες γωνίες μας δίνει τη δυνατότητα να μετρήσουμε τη γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων σωματιδίων (Σχ. 2.3).

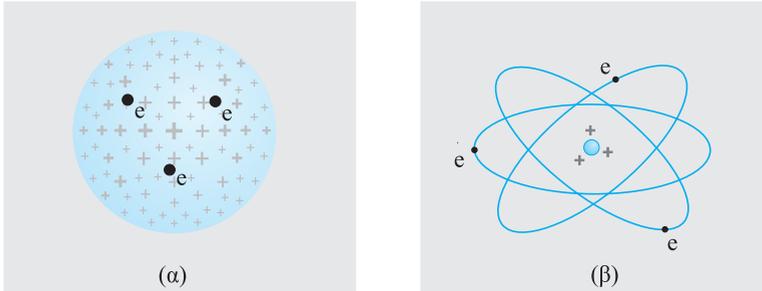


ΣΧΗΜΑ 2.3: Το πείραμα του Rutherford. Η σκέδαση σωματιδίων άλφα μεγάλης ενέργειας από τα άτομα του «στόχου» μπορεί να αποκαλύψει τη δομή του ατόμου.

Για να μην αποκτούν τα διάφορα τεχνικά στοιχεία του πειράματος (λεπτό φύλλο χρυσού, μονοενεργειακή δέσμη) μια μυστικοπαθή σπουδαιότητα, αξίζει να πούμε δυο λόγια για τη σκοπιμότητα που τα υπαγορεύει. Πρώτα από όλα με χρυσό μπορούν να κατασκευαστούν πολύ λεπτά φύλλα (σαν «τσιγαρόχαρτο») έτσι ώστε τα σωματίδια α να μπορούν να περάσουν μέσα από αυτά με πολύ μικρή πιθανότητα να σκεδαστούν σε δύο ή περισσότερα άτομα, γεγονός που διευκολύνει σημαντικά τη θεωρητική ανάλυση του πειράματος. Τον ίδιο σκοπό (διευκόλυνση της θεωρητικής ανάλυσης) εξυπηρετεί και η χρήση μονοενεργειακής δέσμης για την οποία ευτυχώς δεν χρειάζεται ιδιαίτερη μέριμνα γιατί κάθε ραδιενεργός πηγή εκπέμπει «ακτίνες α » σε μια χαρακτηριστική ενέργεια.

Δεν είναι όμως περιττό να προστεθεί στα προηγούμενα και το εξής γενικότερο σχόλιο: Όταν σκεφτόμαστε ένα πείραμα σκέδασης μιας δέσμης σωματιδίων μέσα από ένα υλικό θα πρέπει να έχουμε διαρκώς στο νου μας –με βάση τις τωρινές μας γνώσεις– ότι το άτομο είναι ουσιαστικά *κούφιο*. Δηλαδή ένας τεράστιος κενός χώρος. Θυμηθείτε ότι οι πυρήνες έχουν διάμετρο της τάξης του 10^{-13} cm, ενώ το μέγεθος ενός ατόμου είναι γύρω στο $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ cm, δηλαδή 100.000 φορές μεγαλύτερο. Το σωματίδιο α έχει και αυτό πυρηνικές διαστάσεις (10^{-13} cm), οπότε όχι μόνο δεν έχει καμιά δυσκολία να «περάσει» μέσα από τα άτομα του χρυσού αλλά, αντίθετα, μπορεί να πει κανείς ότι το «ταξίδι» του μέσα από την ύλη είναι τόσο μοναχικό όσο και εκείνο ενός κομήτη που διασχίζει το ηλιακό σύστημα.

Και τώρα επί της ουσίας. Το κεντρικό μας ερώτημα είναι: πώς από τη γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων σωματιδίων μπορούμε να συναγάγουμε τη δομή του ατόμου; Για να διευκολύνουμε τη συζήτηση θα προτείνουμε αμέσως δυο πιθανές ατομικές δομές και θα δείξουμε μετά ότι δίνουν ουσιαστικά διαφορετική σκέδαση. Το ιστορικό σκηνικό ήταν περίπου ως εξής: στην «αγορά» των αρχών του 20ού αιώνα κυριαρχούσε το μοντέλο του Thomson, χάρη στο αναμφισβήτητο πλεονέκτημά του ότι δεν παρουσίαζε προβλήματα ευστάθειας, αφού τα ηλεκτρόνια ισορροπούσαν σε συμμετρικές διατάξεις μέσα στο θετικό ζελέ υπό την επίδραση της ηλεκτρικής του έλξης και των αμοιβαίων τους απώσεων (Σχ. 2.4α). Ένα «πυρηνικό» μοντέλο, όπου το θετικό φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο του ατόμου και τα ηλεκτρόνια περιφέρονταν γύρω από αυτό, είχε προταθεί από τον Nagaoka ήδη από το 1905 (Σχ. 2.4β). Όμως ένα τέτοιο πλανητικό μοντέλο έπασχε από προφανή προβλήματα ευστάθειας. Τα περιφερόμενα ηλεκτρόνια ενός τέτοιου ατόμου εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση (έχουν *κεντρομόλο επιτάχυνση*), οπότε θα χάνουν διαρκώς ενέργεια λόγω ακτινοβολίας και η πτώση τους πάνω στον πυρήνα θα είναι τελικά αναπόφευκτη. Μέσα στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής το πλανητικό μοντέλο του ατόμου είναι, απλούςτατα, ανέφικτο. Εντούτοις το πείραμα του Rutherford θα δείξει ότι έτσι ακριβώς είναι το άτομο!



ΣΧΗΜΑ 2.4: Δύο πιθανά μοντέλα του ατόμου. (α) Το μοντέλο του Thomson. Το θετικό φορτίο είναι απλωμένο σε όλο τον όγκο του ατόμου και τα ηλεκτρόνια ισορροπούν σε μια συμμετρική διάταξη υπό την επίδραση της έλξης από το θετικό «ζελέ» και των αμοιβαίων τους απώσεων. (β) Το πλανητικό ατομικό μοντέλο. Το θετικό φορτίο είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο του ατόμου και τα ηλεκτρόνια περιφέρονται σε ελλειπτικές τροχιές όπως οι πλανήτες γύρω από τον Ήλιο.

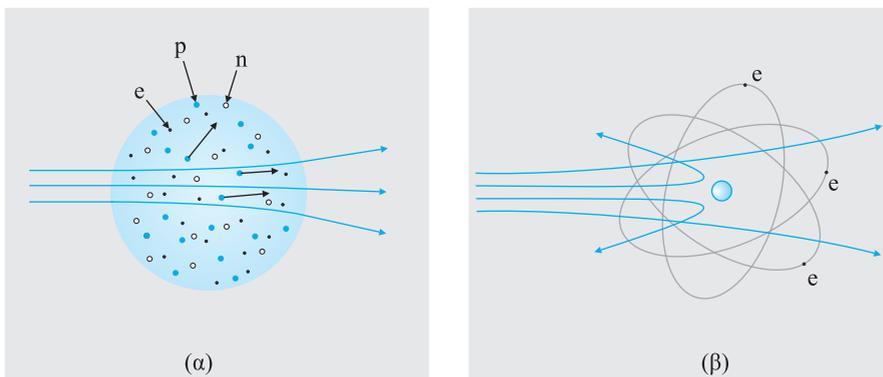
Για να αποφύγουμε το θετικό ζελέ του Thomson και να παρουσιάσουμε την ανάλυση του πειράματος με σύγχρονους όρους θα υποθέσουμε ότι οι φυσικοί της εποχής ήξεραν ότι το άτομο αποτελείται από ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια, και ήθελαν να βρουν πώς είναι κατανεμημένα αυτά τα σωματίδια μέσα στον όγκο του ατόμου.

Δυο ακραίες δυνατότητες είναι οι εξής:

1. Το «εκσυγχρονισμένο» μοντέλο Thomson. Αυτό είναι το παλιό μοντέλο Thomson, μόνο που στη θέση του διάχυτου ζελέ έχουμε τα πρωτόνια και τα νετρόνια ομοιόμορφα αναμειγμένα με τα ηλεκτρόνια σε όλη την έκταση του ατόμου.
2. Το μοντέλο του Rutherford. Εδώ πρωτόνια και νετρόνια είναι συγκεντρωμένα σε έναν μικροσκοπικό, τρομερά μαζικό πυρήνα στο κέντρο του ατόμου, ενώ τα ηλεκτρόνια περιφέρονται σε μεγάλες αποστάσεις από αυτόν.

Τα δύο αυτά μοντέλα διαφέρουν ριζικά ως προς τη σκέδαση σε μεγάλες γωνίες. Πράγματι, επειδή το σωματίδιο α είναι αρκετά βαρύ (τέσσερις φορές βαρύτερο από το πρωτόνιο) και διασχίζει τα άτομα του χρυσού με πολύ μεγάλη ταχύτητα, ο μόνος τρόπος για να εκτραπεί σημαντικά από την ευθύγραμμη τροχιά του είναι να δεχτεί μια πολύ μεγάλη δύναμη, το οποίο όμως μπορεί να συμβεί μόνο αν πλησιάσει πάρα πολύ κοντά σε ένα από τα φορτισμένα σωματίδια του ατόμου. Αλλά αυτό είναι δυνατό να γίνει μόνο αν υπάρχουν βαριά φορτισμένα σωματίδια, τα οποία θα παραμείνουν πρακτικώς ακίνητα καθώς τα πλησιάζει το σωματίδιο α , οπότε μπορούν να ασκήσουν πάνω του μια ισχυρή ηλεκτρική δύναμη ικανή να το εκτρέψει αισθητά από την ευθύγραμμη τροχιά του. Στο εκσυγχρονισμένο μοντέλο Thomson αυτή η

δυνατότητα είναι ανύπαρκτη. Το πιο βαρύ φορτισμένο σωματίδιο του ατόμου είναι το πρωτόνιο και αυτό είναι τέσσερις φορές ελαφρότερο από το σωματίδιο α . Έτσι το τελευταίο περνά κυριολεκτικά σαν βολίδα μέσα από το άτομο, σκορπίζοντας τα πρωτόνια δεξιά και αριστερά του. Όσο για τα ηλεκτρόνια, αυτά ούτε που τα αντιλαμβάνεται! Σε αυτό το μοντέλο η σκέδαση περιορίζεται σε μία έως δύο μοίρες γύρω από την αρχική κατεύθυνση των σωματιδίων α (Σχ. 2.5α).



ΣΧΗΜΑ 2.5: Δοο πιθανά σενάρια για το πείραμα του Rutherford. (α) Το εκσυγχρονισμένο μοντέλο Thomson: Η σκέδαση περιορίζεται σε λίγες μοίρες γύρω από την αρχική κατεύθυνση της δέσμης. (β) Το πλανητικό μοντέλο: Λόγω της μεγάλης μάζας του, ο πυρήνας του ατόμου παραμένει πρακτικά ακίνητος καθώς τον πλησιάζουν τα σωματίδια άλφα και, επομένως, μπορεί να τους ασκήσει μια ισχυρότατη ηλεκτρική άπωση ικανή να τα εκτρέψει ακόμα και κατά 180° από την ευθύγραμμη τροχιά τους.

Στο πυρηνικό μοντέλο τα πράγματα διαφέρουν ριζικά. Εδώ, πρωτόνια και νετρόνια είναι συγκεντρωμένα σε έναν μικροσκοπικό μαζικό πυρήνα. Στο άτομο του χρυσού, παραδείγματος χάριν ($Z = 79$, $A = 197$), ο πυρήνας είναι γύρω στις πενήντα φορές βαρύτερος από το σωματίδιο άλφα. Βέβαια, λόγω του πολύ μικρού πυρηνικού μεγέθους, τα περισσότερα σωματίδια της δέσμης θα περάσουν μακριά από τον πυρήνα και θα υποστούν ασήμαντη απόκλιση. Όμως εκείνο το μικρό, αλλά μετρήσιμο, ποσοστό που θα περάσει δίπλα του, θα υποστεί μια πανίσχυρη ηλεκτροστατική άπωση ικανή να το εκτρέψει ακόμα και κατά εκατόν ογδόντα μοίρες από την ευθύγραμμη τροχιά του (Σχ. 2.5β). Μπορείτε, τώρα, να φανταστείτε την έξαψη του Rutherford όταν είδε ότι αυτό ακριβώς συμβαίνει. «Ήταν το πιο απίστευτο γεγονός που μου 'τυχε στη ζωή μου.» Ταυτόχρονα ήταν και ένα γεγονός που είχε καταλυτική επίδραση στην εξέλιξη της φυσικής. Κυρίως γιατί έθεσε επί τάπητος το πρόβλημα της

ατομικής σταθερότητας ως ένα θεμελιώδες πρόβλημα της φυσικής που ήταν αδύνατον να λυθεί μέσα στο κλασικό πλαίσιο όπως θα δούμε σε λίγο. Από τα φασματοσκοπικά δεδομένα η κλασική φυσική είχε δεχτεί ένα σοβαρό, όχι όμως αποφασιστικό, πλήγμα. Το πείραμα του Rutherford της έδωσε τη χαριστική βολή.

2.2. Ατομική σταθερότητα και κλασική φυσική: Μια αδύνατη συνύπαρξη

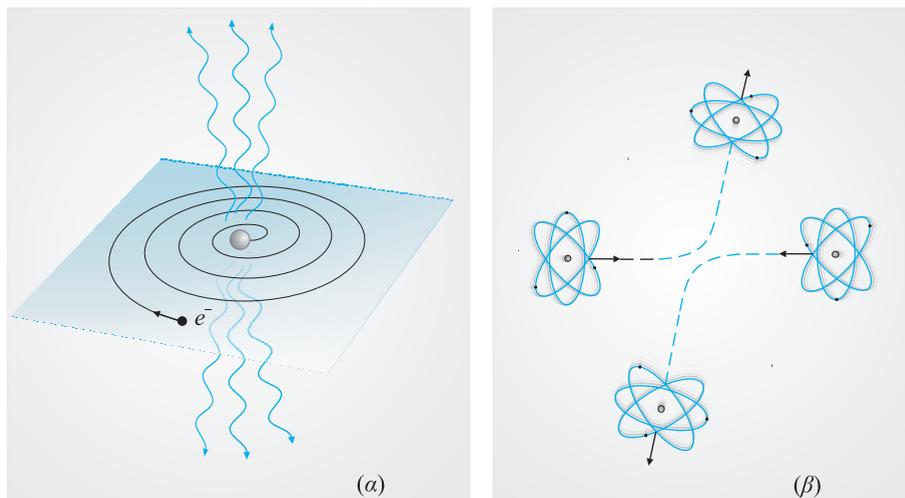
Με τον όρο «σταθερότητα» εννοώ ότι οι ίδιες ουσίες έχουν πάντα τις ίδιες ιδιότητες, σχηματίζονται οι ίδιοι κρύσταλλοι, οι ίδιες χημικές ενώσεις κ.ο.κ. Με άλλα λόγια, ακόμα και ύστερα από μια πληθώρα μεταβολών, λόγω εξωτερικών επιδράσεων, ένα άτομο σιδήρου θα παραμείνει πάντα ένα άτομο σιδήρου, με τις ίδιες ακριβώς, όπως και πριν, ιδιότητες. Αυτό δεν μπορεί να εξηγηθεί με τις αρχές της κλασικής μηχανικής· σίγουρα δεν μπορεί, αν το άτομο ήταν παρόμοιο με ένα πλανητικό σύστημα. Η φύση έχει σαφώς την τάση να παράγει ορισμένες «μορφές» –χρησιμοποιώ τη λέξη «μορφές» στην πιο γενική της έννοια– και να αναδημιουργεί αυτές τις «μορφές» ακόμα και όταν παραμορφώνονται ή καταστρέφονται.

N. BOHR

Αν το μοντέλο του Rutherford είναι σωστό (και σίγουρα είναι), τότε τα ηλεκτρόνια για να παραμείνουν μακριά από τον πυρήνα είναι υποχρεωμένα να περιφέρονται σε ορισμένες τροχιές γύρω από αυτόν, όπως οι πλανήτες γύρω από τον Ήλιο. Όμως τα ηλεκτρόνια είναι φορτισμένα σωματίδια και έτσι η κίνησή τους θα συνοδεύεται αναγκαστικά από εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που θα έχει ως αποτέλεσμα να χάνουν διαρκώς ενέργεια, με αναπόφευκτο τέλος την πτώση τους πάνω στον πυρήνα (Σχ. 2.6α). Μια απλή εκτίμηση τάξης μεγέθους δείχνει αμέσως ότι αυτή η πτώση δεν παίρνει περισσότερο από 10^{-10} sec. Έτσι, σύμφωνα με την κλασική θεωρία, το άτομο θα ήταν ένα εξαιρετικά βραχύβιο κατασκευάσμα. Και φυσικά δεν είναι.

Όμως το πρόβλημα της σταθερότητας των ατόμων είναι πολύ πιο σοβαρό από ό,τι δείχνει αυτό το επιχείρημα. Με άλλα λόγια, η αρκετά διαδεδομένη τάση να αποδίδουμε την κλασική αστάθεια των ατόμων μόνο στην –αναπόφευκτη βέβαια– εκπομπή ακτινοβολίας περικλείει τον κίνδυνο να νομίσει κανείς ότι αν με κάποιο τρόπο αποκλειστεί αυτή η ακτινοβολία, τότε το πρόβλημα της ατομικής σταθερότητας λύθηκε αυτόματα.

Υποθέστε λοιπόν ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είχε καθαρά ηλεκτροστατικό χαρακτήρα. Υπήρχε δηλαδή μόνο η δύναμη Coulomb και τίποτε άλλο. Σε αυτόν τον υποθετικό κόσμο –που θα ήταν, βεβαίως, πολύ σκοτεινός



ΣΧΗΜΑ 2.6: (α) Σταθερότητα έναντι ακτινοβολίας. Όντας φορτισμένα σωματίδια που εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση (έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση) τα ατομικά ηλεκτρόνια θα έπρεπε να ακτινοβολούν συνεχώς ηλεκτρομαγνητική ενέργεια με αναπόφευκτο τέλος την πτώση τους πάνω στον πυρήνα. Και όμως, αυτό δεν συμβαίνει. Στην «κανονική» τους κατάσταση τα άτομα δεν ακτινοβολούν.

β) Σταθερότητα έναντι κρούσεων. Λόγω των συνεχών κρούσεων μεταξύ ατόμων –τουλάχιστον ένα δισεκατομμύριο τέτοιες κρούσεις ανά δευτερόλεπτο– τα ατομικά ηλεκτρόνια θα έπρεπε να αλλάζουν διαρκώς τροχιές ή και να φεύγουν τελείως από το άτομο αν η κρούση είναι αρκετά βίαιη. Εντούτοις τα άτομα αναδύονται από αυτές τις κρούσεις τελείως αμετάβλητα, όπως προκύπτει τόσο από τα φάσματα εκπομπής τους –που δεν δείχνουν την παραμικρή αλλαγή– όσο και από το αναλλοίωτο της φυσικοχημικής τους συμπεριφοράς.

μια και δεν θα υπήρχαν ηλεκτρομαγνητικά κύματα– τα άτομα θα έμοιαζαν πράγματι με μικροσκοπικά πλανητικά συστήματα, αφού ο νόμος της δύναμης είναι ακριβώς ο ίδιος με εκείνον της βαρύτητας. Αυτή ακριβώς η αναλογία με τα πλανητικά συστήματα, που πράγματι φαίνονται αιώνια και αμετάβλητα, πρέπει να θεωρηθεί υπεύθυνη για την παρανόηση (διατυπωμένη ή υπονοούμενη) ότι χωρίς το πρόβλημα της ακτινοβολίας τα άτομα θα ήταν ευσταθείς κατασκευές. Όμως το πλανητικό ανάλογο είναι τελείως ... παραπλανητικό για τον εξής πολύ απλό λόγο: το κάθε πλανητικό σύστημα βρίσκεται αρκετά μακριά από τα άλλα, οπότε η αμοιβαία βαρυτική αλληλεπίδραση μπορεί να αγνοηθεί σε σύγκριση με τις εσωτερικές βαρυτικές δυνάμεις. Έτσι περνά τη ζωή του τελείως αδιατάρακτο από εξωτερικές επιδράσεις, σε μια κάποια γωνιά του αχανούς σύμπαντος.

Η εικόνα στο ατομικό «μικροσύμπαν» κάθε άλλο παρά θυμίζει αυτή την κοσμική αταραξία. Όπως θα δούμε αναλυτικά σε λίγο, εδώ τα πλανητικά συστήματα (δηλαδή τα άτομα) βρίσκονται σε μια αδιάκοπη θερμική κίνηση, με δισεκατομμύρια αμοιβαίες κρούσεις το δευτερόλεπτο. Και μάλιστα με ταχύτητες της τάξης των χιλιομέτρων ανά δευτερόλεπτο. Αν φανταστούμε έστω και μια ανάλογη κρούση ανάμεσα σε δύο πλανητικά συστήματα, τότε δεν θα έμενε κυριολεκτικά τίποτα στη θέση του. Στην καλύτερη περίπτωση οι θέσεις και οι τροχιές των πλανητών θα άλλαζαν σε τέτοιο βαθμό, ώστε θα ήταν τελείως αδύνατο σε έναν εξωτερικό παρατηρητή να αναγνωρίσει ένα οποιοδήποτε από τα δύο. Η κατάσταση στον μικρόκοσμο είναι εκπληκτικά διαφορετική (Σχ. 2.6β). Εδώ τα ατομικά πλανητικά συστήματα αναδύονται από τις αμοιβαίες αλληπάλληλες κρούσεις τελείως αμετάβλητα. Πώς το ξέρουμε αυτό; Απλούστατα, από το γεγονός ότι τα φάσματα και η χημική τους συμπεριφορά δεν παρουσιάζουν καμιά απολύτως αλλαγή.

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα άτομα ή τα μόρια συμπεριφέρονται όπως τα φαντάστηκαν οι Έλληνες ατομιστές: σαν συμπαγείς και αδιαίρετοι κόκκοι ύλης. Και όμως, τώρα ξέρουμε πολύ καλά ότι το άτομο ούτε συμπαγές ούτε αδιαίρετο είναι. Θα έλεγε μάλιστα κανείς ότι είναι το πιο εύθραυστο και ντελικάτο δημιούργημα της φύσης. Μερικά ηλεκτρόνια, που συγκρατούνται γύρω από τον πυρήνα με δυνάμεις «εξ αποστάσεως». Ούτε «συνδεδετικά ραβδάκια», σαν αυτά που χρησιμοποιούμε στα χημικά μοντέλα, ούτε μυστηριώδεις «κολλητικές ουσίες», ούτε τίποτα. Μόνο τα ηλεκτρόνια, ο πυρήνας και το κενό. Πώς είναι δυνατόν να παραμένει ευσταθές και αμετάβλητο αυτό το κατασκεύασμα; Ξέροντας μάλιστα ότι υφίσταται δισεκατομμύρια αλληπάλληλες κρούσεις το δευτερόλεπτο; Ακόμα χειρότερα: πώς εξηγείται το πασιφανές γεγονός ότι η μακροσκοπική στερεά ύλη είναι τρομακτικά συμπαγής και ασυμπίεστη ενώ γνωρίζουμε ότι αποτελείται από ... άδεια μπαλόνια; Από άτομα που είναι κατά 99,999999999999% κούφια; Τι είναι εκείνο που υποχρεώνει τα ηλεκτρόνια –σωματίδια με πρακτικά μηδενική ακτίνα (και πάντως μικρότερη από 10^{-17} cm)— να περιφέρονται σε αποστάσεις από τον πυρήνα εκατό χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από το μέγεθός του αφήνοντας τελείως άδειο από ύλη τον όγκο του ατόμου; Τελικά, πώς περπατάμε χωρίς να υποχωρεί η ύλη κάτω από τα πόδια μας; Χωρίς κανένα από τα τόσα «κούφια μπαλόνια» να σπάει;

Όμως, εκτός από τη σταθερότητα, υπάρχει και το εξίσου μυστηριώδες πρόβλημα της ταυτότητας των όμοιων ατόμων. Όλα τα άτομα ενός στοιχείου, οπουδήποτε στο σύμπαν και αν βρίσκονται, είναι ακριβώς τα ίδια. Καμιά φυσική μέτρηση δεν μπορεί να ξεχωρίσει το ένα από το άλλο. Αυτό δεν θα είχαμε καμιά δυσκολία να το καταλάβουμε αν τα άτομα ήταν πραγματικά «άτομα», άρα και «εξαιρετέα από την αλλαγή και τη φθορά», όπως λέει ο Επίκουρος. Όμως δεν είναι. Τα άτομα διασπώνται και ανασυντίθενται. Καταστρέφονται και αναδημιουργούνται. Και, παρ' όλα αυτά, ξαναβγαίνουν τα

ίδια. Αν διασπάσετε ένα άτομο οξυγόνου στα ηλεκτρόνια και στον πυρήνα του και τα αφήσετε να ξαναενωθούν –και αυτό συμβαίνει συνεχώς σε μια ηλεκτρική εκκένωση– το νέο άτομο που θα σχηματιστεί θα είναι *απαράλλαχτο* με το παλιό. Η διαδικασία που προηγήθηκε δεν θα έχει αφήσει κανένα απολύτως ίχνος στη μορφή και τις ιδιότητες του νέου ατόμου. Προσπαθήστε τώρα να φανταστείτε μια ανάλογη διάλυση και αναδημιουργία του ηλιακού μας συστήματος. Νομίζετε ότι υπάρχει η παραμικρή πιθανότητα να ξαναβρεθούν οι πλανήτες στις ίδιες όπως και πριν τροχιές γύρω από τον Ήλιο; Καλύτερα να στοιχηματίσετε πως όχι. Η πιθανότητα είναι ακριβώς μηδέν. Το πλανητικό μας σύστημα είναι το μοναδικό και ανεπανάληπτο προϊόν των συγκεκριμένων συνθηκών της γένεσής του. Όχι πως δεν υπάρχουν άλλα πλανητικά συστήματα στο σύμπαν. Κάθε άλλο μάλιστα. Οι εικασίες των ειδικών ανεβάζουν τον αριθμό τους σε εκατοντάδες εκατομμύρια, μόνο στον γαλαξία μας. Όμως, κανένα από αυτά δεν θα είναι ταυτόσημο με το δικό μας. Το καθένα τους θα είναι επίσης «το μοναδικό και ανεπανάληπτο προϊόν των συνθηκών της γένεσής του». Τα μακροσκοπικά δημιουργήματα της φύσης έχουν ιστορία. Έχουν παρελθόν και μέλλον. Οι μικροσκοπικές δομές, τα άτομα και τα μόρια, δεν έχουν ούτε το ένα ούτε το άλλο. Τα άτομα του υδρογόνου, παραδείγματος χάριν, ήταν τα ίδια από καταβολής κόσμου. Και θα παραμείνουν τα ίδια. Η μορφή τους είναι προκαθορισμένη.

Προκαθορισμένη από τι; Ε, λοιπόν, για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα –κατά τη γνώμη μου το βαθύτερο που απασχόλησε ποτέ το ανθρώπινο μυαλό– θα χρειαστεί μια επιστημονική επανάσταση. Πρόκειται για την επανάσταση της οποίας την ανέλιξη παρακολουθούμε τώρα.

2.3. Η ατομική σταθερότητα σε αριθμούς

Με κίνδυνο να ανακόψουμε την ... ταχεία προέλαση του αναγνώστη προς τη θεωρία του Bohr –δηλαδή την πρώτη σοβαρή προσπάθεια να εξηγηθούν τα δύο μυστήρια του μικρόκοσμου που περιγράψαμε προηγουμένως– θα επιχειρήσουμε σε τούτο το εδάφιο και μια αριθμητική μελέτη της κλασικής αστάθειας των ατόμων ώστε να μην μείνει καμιά αμφιβολία ότι πρόκειται όντως για ένα πρόβλημα το οποίο η κλασική φυσική αδυνατεί απολύτως να αντιμετωπίσει. Θα παρουσιάσουμε τους σχετικούς υπολογισμούς υπό τη μορφή δύο κατάλληλων προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Για να αντιληφθείτε κάτω από πόσο αντίξοες συνθήκες καταφέρνουν τα άτομα και τα μόρια να διατηρούν τη σταθερότητα της μορφής τους, υπολογίστε τη *συχνότητα των κρούσεων* μεταξύ των μορίων του ατμοσφαιρικού αέρα υπό κανονικές συνθήκες. Θεωρήστε τα μόρια ως σφαιρίδια διαμέτρου ενός angstrom και πάρτε μια χονδρική τιμή για τη σωματιδιακή πυκνότητα n του αέρα ίση με 10^{20} μόρια/cm³, που είναι χίλιες περίπου φορές μικρότερη από εκείνη της στερεάς ύλης.

Αύση: Η βασική ιδέα του υπολογισμού είναι να εκτιμήσουμε πρώτα τη μέση ελεύθερη διαδρομή l των μορίων του αέρα –δηλαδή το μέσο διάστημα που διανύει κάθε μόριο από τη μία σύγκρουση ως την επόμενη– και να τη διαιρέσουμε με τη μέση θερμική ταχύτητα v ώστε να βρούμε το χρονικό διάστημα τ μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων. Η συχνότητα των κρούσεων θα ισούται, προφανώς, με $1/\tau$. Η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων υπολογίζεται πολύ εύκολα αν σκεφτούμε ότι το μόριο θα συγκρουστεί με κάποιο άλλο αν διανύσει ένα διάστημα τέτοιο ώστε να *σαρώσει* με τη διατομή του τον όγκο που του αναλογεί και ο οποίος ισούται προφανώς με $V/N = 1/(N/V) = 1/n$, όπου n ο αριθμός των μορίων ανά cm^3 . Τα μεγέθη l (μέση ελεύθερη διαδρομή), σ (διατομή του μορίου) και n (σωματιδιακή πυκνότητα) θα συνδέονται λοιπόν με τη σχέση

$$\begin{aligned} \ell \cdot \sigma &= \text{όγκος που σαρώνει το μόριο διανύοντας απόσταση } \ell \\ &= \text{όγκος του διαθέσιμου χώρου ανά μόριο} = 1/n \\ \Rightarrow \ell &= \frac{1}{n\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

οπότε για $n \simeq 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ και $\sigma \simeq (10^{-8} \text{ cm})^2 = 10^{-16} \text{ cm}^2$, θα έχουμε

$$\ell \simeq 10^{-4} \text{ cm}. \quad (2)$$

Για τη μέση θερμική ταχύτητα v των μορίων του αέρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Mv^2 &= \frac{3}{2} kT \Rightarrow Mc^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 = 3kT \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{3kT}{Mc^2}} \\ \Rightarrow \frac{v}{c} &\simeq \sqrt{\frac{3 \times \frac{1}{40} \text{ eV}}{30 \times 10^9 \text{ eV}}} \simeq 10^{-5} \\ \Rightarrow v &\simeq 10^5 \text{ cm/sec} \end{aligned} \quad (3)$$

όπου, βέβαια, γράψαμε την κινητική ενέργεια με τον συγκεκριμένο τρόπο ($Mv^2 \equiv Mc^2(v/c)^2$) για να χρησιμοποιήσουμε νούμερα που μας είναι γνωστά, όπως η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου $m_p c^2 \simeq 2.000 \cdot m_e c^2 \simeq 2.000 \times 0,5 \text{ MeV} \simeq 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$. Ως τυπικό μόριο του αέρα πήραμε το N_2 με μάζα 28 ($\simeq 30$) φορές εκείνη του πρωτονίου. Για το kT σε θερμοκρασία δωματίου χρησιμοποιήσαμε τη στρογγυλεμένη τιμή $kT \simeq 1/40 \text{ eV}$ η οποία προκύπτει από την $(kT)_{T \simeq 12.000 \text{ K}} \simeq 1 \text{ eV}$, που δίνεται στους σχετικούς πίνακες στα εσώφυλλα του βιβλίου. Και, φυσικά, στρογγυλέψαμε αδιάστακτα τα νούμερα, όπως αρμόζει στο πνεύμα των εκτιμήσεων τάξεως μεγέθους.

Από τις (2) και (3) έχουμε αμέσως, για τον χρόνο μεταξύ διαδοχικών κρούσεων, το αποτέλεσμα

$$\tau = \frac{\ell}{v} \simeq 10^{-9} \text{ sec}$$

και για τη συχνότητα κρούσεων το

$$f = \frac{1}{\tau} \simeq 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

Κάθε μόριο του αέρα υφίσταται λοιπόν περίπου ένα δισεκατομμύριο κρούσεις με άλλα μόρια το δευτερόλεπτο. Σίγουρα θα πρέπει να είναι μια πολύ ανθεκτική κατασκευή!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: Σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η ακτινοβολούμενη ισχύς (\equiv ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) από ένα σωματίδιο φορτίου q που εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση a δίνεται από τον τύπο

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}. \quad (\text{I})$$

Χρησιμοποιήστε τον (I) για να δείξετε ότι αν το ηλεκτρόνιο στο μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου υπάκουε στον κλασικό αυτό νόμο, θα έπεφτε στον πυρήνα μέσα σε χρόνο

$$\tau = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4}, \quad (\text{II})$$

όπου a_0 η ακτίνα του Bohr. Υποθέστε ότι η πτώση στον πυρήνα γίνεται πάνω σε μια σπειροειδή τροχιά μειούμενης ακτίνας που μπορεί όμως, στιγμιαία, να θεωρηθεί ως κυκλική. Ποια είναι η αριθμητική τιμή του χρόνου (II);

Λύση: Αν πράγματι το ηλεκτρόνιο ακτινοβολούσε με τον ρυθμό (I), τότε η ολική του ενέργεια E θα μειωνόταν κατά το ίδιο ποσό στη μονάδα του χρόνου. Θα ίσχυε δηλαδή η

$$\frac{dE}{dt} = -P \quad (1)$$

και αρκεί τώρα να εκφράσουμε τα μεγέθη των δύο μελών συναρτήσει μόνο της στιγμιαίας ακτίνας $r = r(t)$ της φθίνουσας τροχιάς του ηλεκτρονίου για να πάρουμε μια διαφορική εξίσωση από την οποία θα υπολογιστεί ο χρόνος πτώσεως. Για την ολική ενέργεια E έχουμε

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{r}, \quad (2)$$

όπου, βέβαια, τα v και r δεν είναι ανεξάρτητα αλλά συνδέονται με τον νόμο του Νεύτωνα της κυκλικής κίνησης

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad (3)$$

οπότε –βάσει της (3)– η ολική ενέργεια (2) θα γράφεται συναρτήσει μόνο του r ως

$$E = -\frac{e^2}{2r} \quad (4)$$

και είναι, βεβαίως, αρνητική, αφού πρόκειται για δέσμια κίνηση. Για την ακτινοβολούμενη ισχύ P θα έχουμε $q = -e$ και $a = v^2/r = e^2/mr^2$ (εξίσωση (3)), οπότε ο τύπος (I) θα δώσει

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{r^4}. \quad (5)$$

Εισάγοντας τις (4) και (5) στην (1) παίρνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση $r = r(t)$:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} \frac{1}{r^2}$$

που γράφεται ισοδύναμα ως

$$r^2 dr = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} dt,$$

οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε κάθε μέλος ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή παίρνοντας υπ' όψιν τόσο την αρχική συνθήκη (για $t = 0$ είναι $r = a_0$) όσο και την τελική (για $t = \tau = \text{χρόνος πτώσεως}$, είναι $r = 0$). Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_{r=a_0}^{r=0} r^2 dr &= -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} \int_0^\tau dt \\ \Rightarrow -\frac{a_0^3}{3} &= -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} \tau \Rightarrow \tau = \frac{m^2 c^3 a_0^3}{4e^4} \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο αποτέλεσμα. Για τις (στρογγυλεμένες) αριθμητικές τιμές στο σύστημα cgs:

$$m \simeq 10^{-27} \text{ g}, \quad a_0 \simeq 10^{-8} \text{ cm}, \quad e \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ esu}$$

προκύπτει αμέσως ότι ο χρόνος πτώσεως είναι της τάξεως των 10^{-10} sec. Ένα κλασικό άτομο θα ήταν πράγματι ένα πολύ βραχύβιο κατασκεύασμα.

3. Η θεωρία του Bohr

Αφειρηρία μου δεν ήταν καθόλου η ιδέα ότι το άτομο είναι ένα πλανητικό σύστημα σε μικρή κλίμακα και σαν τέτοιο ότι διέπεται από τους νόμους της αστρονομίας. Ποτέ δεν πήρα αυτή την αναλογία κατά γράμμα. Αφειρηρία μου ήταν μάλλον η σταθερότητα της ύλης. Ένα καθαρό θαύμα αν το δει κανείς από τη σκοπιά της κλασικής φυσικής.

N. BOHR

3.1. Εισαγωγή

Μπροστά στην ολοφάνερη αδυναμία της κλασικής φυσικής να εξηγήσει τόσο την ευστάθεια των ατόμων όσο και τα φασματοσκοπικά δεδομένα, ο Bohr προχώρησε το 1913 στη διατύπωση δύο υποθέσεων που έρχονταν σε καθαρή αντίθεση με τις πιο βασικές αρχές της κλασικής θεωρίας. Ο Bohr, όπως προηγουμένως ο Planck και ο Einstein, μπόρεσε να φτάσει στη διατύπωση των φερώνυμων συνθηκών μόνο χάρη στο γεγονός ότι τα φασματοσκοπικά δεδομένα για τα άτομα –ιδιαίτερα το άτομο του υδρογόνου– είχαν φτάσει σε ένα τόσο υψηλό σημείο επεξεργασίας, ώστε να δείχνουν πια καθαρά την κατεύθυνση προς την οποία έπρεπε να κινηθεί μια θεωρητική τους ερμηνεία.

Υπενθυμίζουμε τα δύο κεντρικά συμπεράσματα της ατομικής φασματοσκοπίας:

Πρώτο: Η συνδυαστική αρχή

$$f = f_m - f_n.$$

Δεύτερο: Για το άτομο του υδρογόνου η ακολουθία των φασματικών όρων δίνεται από τον εμπειρικό τύπο

$$f_n = \frac{R}{n^2} \quad (R = 3,27 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}).$$

Όμως, πέρα από τα φασματικά δεδομένα, αυτό που βρισκόταν στο επίκεντρο της προβληματικής του Bohr ήταν το πρόβλημα της ατομικής σταθερότητας. «Ένα καθαρό θαύμα αν το δει κανείς από κλασική σκοπιά». Αλλά γιατί να το δει κανείς από κλασική σκοπιά; Αυτή είναι μια ερώτηση που εύκολα την εκστομίζει κανείς σήμερα. Κατόπιν εορτής. Στα 1913, όμως, το «κλασικό σύνταγμα» ήταν ακόμα σε πλήρη ισχύ. Και παρ' ότι η αμφισβήτησή του δεν ήταν ποινικό αδίκημα, μπορούσε ωστόσο να έχει επαγγελματικές συνέπειες. Θα σκεφτείτε, βέβαια, ότι μια τέτοια αμφισβήτηση –ριζική μάλιστα– είχε ήδη γίνει από τον Planck και επαναλήφθηκε σε βαρύτερη

μορφή από τον Einstein με τη θεωρία των φωτονίων. Αλλά η γενική πεποίθηση ήταν ότι η κλασική ορθοδοξία, παρά τις δυσκολίες της, θα κατάφερνε τελικά να δαμάσει την αίρεση. Ο ίδιος ο Planck αυτό ακριβώς προσπαθούσε να κάνει όλα αυτά τα χρόνια. Να εξορκίσει το κακό. Να εξηγήσει δηλαδή τη σταθερά του με καθαρά κλασικούς όρους. Όμως ο Bohr —όπως προηγουμένως ο Einstein και αργότερα ο Heisenberg, ο Pauli, ο Dirac— μπήκε στον επιστημονικό στίβο των αρχών του 20ού αιώνα χωρίς συναισθηματικούς ή επαγγελματικούς δεσμούς με την κρατούσα φυσική φιλοσοφία. Μην έχοντας εκτεθεί στην αναμφισβήτητη γοητεία του κλασικού οικοδομήματος, ήταν διατεθειμένος να το απαρνηθεί πολύ πιο εύκολα από όσο οι φυσικοί της προηγούμενης γενιάς. Έτσι, τη στιγμή που ο Planck πάσχιζε να εκδιώξει τη σταθερά του από τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, ο Bohr αποφάσισε να την εισαγάγει και στα ατομικά.

Αξίζει τον κόπο να παρακολουθήσουμε το σκεπτικό του γιατί δείχνει πολύ καθαρά ότι πίσω από τις μεγάλες επιστημονικές ανακαλύψεις βρίσκονται συχνά μερικές απίστευτα απλές σκέψεις. Ο Bohr ξεκινάει από την παρατήρηση ότι τα άτομα έχουν ένα καθορισμένο μέγεθος (της τάξης του ενός angstrom) χωρίς να υπάρχει κανένας αποχρών λόγος γι' αυτό. Στο άτομο του υδρογόνου, παραδείγματος χάριν, το ηλεκτρόνιο θα μπορούσε να περιφέρεται σε μια οποιαδήποτε τροχιά γύρω από τον πυρήνα οπότε το μέγεθός του δεν θα υπέκειτο σε κανέναν απολύτως περιορισμό. Μάλιστα δεν θα έπρεπε να είναι καν σταθερό, αφού η τροχιά του ηλεκτρονίου θα άλλαζε διαρκώς υπό την επίδραση των κρούσεων με τα γειτονικά άτομα.

Και όμως, το άτομο του υδρογόνου έχει ένα καθορισμένο μέγεθος. Η ακτίνα του είναι περίπου μισό angstrom. Από τι μπορεί να εξαρτάται αυτή η ακτίνα; Αναγκαστικά μόνο από φυσικές ποσότητες που έχουν σχέση με το άτομο —όπως η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου— και από τις θεμελιώδεις φυσικές σταθερές των νόμων που καθορίζουν τη δομή του. Δηλαδή από την ταχύτητα του φωτός, αφού αυτή είναι η μόνη θεμελιώδης φυσική σταθερά που διαθέτει η κλασική θεωρία.

Η ακτίνα a του ατόμου δεν μπορεί λοιπόν παρά να εξαρτάται μόνο από τα τρία μεγέθη m , e και c . Τότε όμως —σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της διαστατικής ανάλυσης— η εξάρτηση θα είναι διαστατικά προσδιορίσιμη. Μάλιστα μπορείτε να δείτε αμέσως ότι θα είναι^(*)

$$a \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (2.3)$$

Τον αριθμητικό συντελεστή που μετατρέπει αυτή την αναλογία σε ισότητα, δεν μπορούμε βέβαια να τον βρούμε με διαστατικά επιχειρήματα. Όμως

^(*) Αυτό προκύπτει αμέσως, εξισώνοντας τις ομοδιάστατες ποσότητες e^2/a (= ενέργεια) και mc^2 (= ενέργεια) και λύνοντας ως προς a .

από την πείρα μας με άλλους φυσικούς τύπους, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι αριθμητικοί συντελεστές που εμφανίζονται σε αυτούς δεν είναι ποτέ πολύ μεγάλοι ή πολύ μικροί αριθμοί. Συνήθως είναι κάποιο 2 ή $\sqrt{2}$ ή $1/\pi$ ή, ακόμα, 2π , όπως στον τύπο των Rayleigh-Jeans. Αντικαθιστώντας στον (2.3) τις αριθμητικές τιμές των m , e και c βρίσκουμε αμέσως ότι το a πέφτει στην περιοχή των 10^{-13} cm. Είναι δηλαδή πέντε τάξεις μεγέθους μικρότερο από την παρατηρούμενη ατομική ακτίνα!

Υποθέστε τώρα, όπως έκανε και ο Bohr, ότι η σταθερά του Planck παίζει κάποιο ρόλο στα ατομικά φαινόμενα. Τότε μπορούμε πια να κατασκευάσουμε και έναν άλλο συνδυασμό με διαστάσεις μήκους. Συγκεκριμένα, τον^(*)

$$a \sim \frac{\hbar^2}{me^2}$$

του οποίου η αριθμητική τιμή είναι 0,5 Å. Βλέπουμε δηλαδή ότι η εισαγωγή της σταθεράς του Planck μας δίνει αμέσως το χαρακτηριστικό μέγεθος των ατόμων. Αυτή η προκαταρκτική διερεύνηση ήταν αρκετή για να πείσει τον Bohr ότι η σταθερά \hbar πρέπει να διαδραματίζει καίριο ρόλο και στα ατομικά φαινόμενα. Ο δρόμος προς τις συνθήκες κβάντωσης ήταν πια ανοιχτός.

3.2. Η πρώτη συνθήκη του Bohr

Ας ξεκινήσουμε πρώτα από τη συνδυαστική αρχή

$$f = f_m - f_n \quad (2.4)$$

που είναι ένας γενικός εμπειρικός νόμος εφαρμόσιμος σε όλα τα άτομα. Αν δεχτούμε, όπως έκανε και ο Bohr, την υπόθεση των φωτονίων, τότε μπορούμε να «αποκρυπτογραφήσουμε» αμέσως το φυσικό μήνυμα αυτού του κλασικά ανεξήγητου νόμου. Κατά τον Einstein, ένα φωτόνιο συχνότητας f έχει ενέργεια

$$E = hf. \quad (2.5)$$

Ας πολλαπλασιάσουμε λοιπόν τα δύο μέλη της (2.4) με h , ώστε στο πρώτο μέλος να πάρουμε την ενέργεια του εκπεμπόμενου από το άτομο φωτονίου. Θα έχουμε έτσι

$$hf = hf_m - hf_n. \quad (2.6)$$

^(*) ο οποίος προκύπτει επίσης πολύ εύκολα εξισώνοντας τις ομοδιάστατες ποσότητες e^2/a (= ενέργεια) και $p^2/2m = (h/\lambda)^2/2m|_{\lambda \simeq a} \simeq \hbar^2/ma^2$ (= ενέργεια) και λύνοντας ξανά ως προς a . Ενώ, βέβαια, το \hbar (= $h/2\pi$) είναι η σύγχρονη (ή ανηγμένη) σταθερά του Planck που εισαγάγαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου και θα αντικαταστήσει την παλιά σταθερά του Planck από δω και πέρα.

Όμως η αρχή διατήρησης της ενέργειας μας λέει τώρα ότι αφού το φωτόνιο, φεύγοντας από το άτομο, πήρε μαζί του μια ενέργεια $E = hf$, οι ενέργειες του ατόμου πριν και μετά την εκπομπή θα συνδέονται με τη σχέση

$$hf = E_i - E_f. \quad (2.7)$$

Συγκρίνετε τώρα τις (2.6) και (2.7). Ποια είναι η πιο φυσιολογική ερμηνεία των όρων hf_m και hf_n που μπορείτε να σκεφτείτε; Προφανώς ότι αντιστοιχούν σε αρχική (initial) και τελική (final) ενέργεια του ατόμου.

Δεδομένου όμως ότι χρειάζεται να δώσουμε ενέργεια για να απομακρύνουμε το ηλεκτρόνιο από τον πυρήνα, τόσο η αρχική όσο και η τελική ενέργεια του ατόμου θα είναι αρνητικοί αριθμοί. Έτσι η σωστή σύνδεση ενεργειών και φασματικών όρων που απορρέει από την αντιπαραβολή των (2.6) και (2.7) θα είναι η

$$E_i = -hf_n, \quad E_f = -hf_m.$$

Δεδομένου, τέλος, ότι οι φασματικοί όροι αποτελούν μια διάκριτη ακολουθία, οι παραπάνω σχέσεις μας λένε ότι το ίδιο ισχύει και για τις επιτρεπόμενες ενέργειες του ατόμου. Φτάνουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι οι επιτρεπόμενες ενέργειες στα άτομα είναι κβαντωμένες και δίνονται από τη σχέση

$$E_n = -hf_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αυτή είναι η περίφημη πρώτη συνθήκη του Bohr και διατυπώνεται σε ολοκληρωμένη μορφή ως εξής:

Πρώτη συνθήκη του Bohr: Οι ενεργειακές καταστάσεις των ατόμων είναι κβαντωμένες. Οι επιτρεπόμενες ενέργειες δίνονται από τη σχέση

$$E_n = -hf_n,$$

όπου f_n η ακολουθία των φασματικών όρων του κάθε ατόμου. Κάθε επιτρεπόμενη ενέργεια ορίζει μια «στάσιμη κατάσταση» στην οποία το άτομο δεν ακτινοβολεί. Ακτινοβολία εκπέμπεται μόνο κατά τη μετάβαση του ατόμου από μια ανώτερη σε μια κατώτερη ενεργειακή στάθμη. Η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου προσδιορίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$hf = E_n - E_m.$$

Όπως βλέπετε, η ιδέα της κβάντωσης όπως εκφράζεται με την πρώτη συνθήκη του Bohr αναδύεται τελείως αβίαστα από την εμπειρική συνδυαστική αρχή. Με τη σειρά της, αυτή η αρχή γίνεται πια τελείως διαφανής και εύλογη μέσα στο πλαίσιο της πρώτης συνθήκης.

3.3. Η δεύτερη συνθήκη του Bohr

Γνωρίζοντας τώρα ότι οι ενεργειακές καταστάσεις στα άτομα είναι κβαντωμένες, δεν μένει παρά να αναζητήσουμε μια κατάλληλη *συνθήκη κβάντωσης* από την οποία θα μπορούν να υπολογιστούν θεωρητικά οι επιτρεπόμενες ενέργειες. Γι' αυτόν τον σκοπό είναι λογικό να ξεκινήσουμε από το άτομο του υδρογόνου, για το οποίο η φασματοσκοπική έρευνα μας έχει ετοιμάσει έναν εξαιρετικά απλό και ακριβή εμπειρικό τύπο για την ακολουθία των φασματικών όρων. Συγκεκριμένα, τον

$$f_n = \frac{R}{n^2}, \quad R = 3,27 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}.$$

Δεδομένου τώρα ότι οι επιτρεπόμενες ενέργειες E_n συνδέονται με τους φασματικούς όρους f_n μέσω της σχέσης

$$E_n = -hf_n,$$

θα έχουμε για το άτομο του υδρογόνου τον τύπο

$$E_n = \frac{-hR}{n^2} = -\frac{\epsilon}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου $\epsilon = hR = 2,178 \times 10^{-11} \text{ erg} = 13,6 \text{ eV}$, μια εμπειρικά προσδιορισμένη παράμετρος. Ακολουθώντας τον Bohr θα εισαγάγουμε τώρα την πολύ λογική υπόθεση ότι η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων του ατόμου του υδρογόνου απλώς αντανακλά το γεγονός ότι για κάποιον –ανεξήγητο προς στιγμήν– λόγο, *το ηλεκτρόνιο μόνο σε ορισμένες διάκριτες τροχιές μπορεί να κινηθεί, και σε καμία άλλη*. Αν περιοριστούμε στις κυκλικές, τότε μπορούμε να βρούμε ποιες είναι, μια και γνωρίζουμε την εμπειρικά προσδιορισμένη ακολουθία των επιτρεπόμενων ενεργειών. (Οι κυκλικές τροχιές είναι μονοπαμετρικές, οπότε η γνώση μιας οποιασδήποτε ποσότητας τις καθορίζει μονοσήμαντα.)

Ξεκινάμε από τον τύπο της ολικής ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}, \quad (2.8)$$

στον οποίο η ενέργεια της ηλεκτροστατικής έλξης ηλεκτρονίου-πρωτονίου έχει εκφραστεί στο σύστημα cgs, που είναι σαφώς απλούστερο από το mks, λόγω της απουσίας του συντελεστή $k = 1/4\pi\epsilon_0$ από τον σχετικό νόμο δύναμης (νόμος του Coulomb). Υπενθυμίζουμε σχετικά ότι είναι

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{cgs}), \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{mks}).$$

Για να μην διακόψουμε όμως τη ροή της παρούσας συζήτησης θα αναβάλλουμε για λίγο μια λεπτομερέστερη ανάλυση του συστήματος μονάδων και θα προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας του Bohr.

Εκτός από τη (2.8) μια δεύτερη σχέση μεταξύ των v και r μας προσφέρει ο νόμος του Νεύτωνα για μια κυκλική τροχιά

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}. \quad (2.9)$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $mv^2 = e^2/r$ από τη (2.9) στη (2.8) παίρνουμε

$$E = -\frac{e^2}{2r}, \quad (2.10)$$

οπότε η ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε ολική ενέργεια $E = -\epsilon/n^2$ θα δίνεται από τον τύπο

$$r = -\frac{e^2}{2E} = \frac{e^2}{2\epsilon} n^2$$

και η αντίστοιχη ταχύτητα περιφοράς v ($=\sqrt{e^2/mr}$ βάσει της (2.9)) από την

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \frac{1}{n}$$

οπότε για τη στροφορμή $\ell = mvr$ του περιστρεφόμενου ηλεκτρονίου θα είναι

$$\ell = e^2 \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} n = Ln$$

όπου L η ποσότητα $e^2 \sqrt{m/2\epsilon}$ της οποίας η αριθμητική τιμή για $m = m_e = 0,910 \times 10^{-27}$ g, $e = 4,802 \times 10^{-10}$ esu και $\epsilon = 13,6$ eV $= 2,178 \times 10^{-11}$ erg είναι

$$L = 1,05 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} = \hbar \left(= \frac{h}{2\pi} \right).$$

Τα ίδια τα πειραματικά δεδομένα μας λένε λοιπόν ότι η στροφορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου μπορεί να πάρει μόνο τη διάκριτη ακολουθία τιμών $\ell = n\hbar$, δηλαδή τα ακέραια πολλαπλάσια της σύγχρονης σταθεράς του Planck. Φτάνουμε έτσι στην ακόλουθη «δεύτερη συνθήκη» της θεωρίας του Bohr.

Δεύτερη συνθήκη του Bohr: Επιτρέπονται μόνο εκείνες οι κυκλικές τροχιές, για τις οποίες η στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σύγχρονης σταθεράς του Planck.

Ανεξαρτήτως τώρα του πώς προέκυψε η δεύτερη συνθήκη του Bohr, ο αναγνώστης μπορεί να την θεωρήσει πλέον ως *βασικό αξίωμα* μιας νέας θεωρίας του ατόμου και να προχωρήσει στον υπολογισμό των συνεπειών της αγνοώντας όλη την προηγούμενη διαδικασία. Η βασική ιδέα του υπολογισμού είναι πολύ απλή. Η συνθήκη $\ell = mvr = n\hbar$ σε συνδυασμό με τον νόμο του Νεύτωνα $m(v^2/r) = e^2/r^2$ σχηματίζουν το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$mvr = n\hbar, \quad m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

το οποίο λύνεται αμέσως και δίνει για τις ακτίνες των επιτρεπόμενων τροχιών r_n και τις αντίστοιχες ταχύτητες περιφοράς v_n , τις εκφράσεις

$$\blacktriangleright \quad r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n},$$

ενώ για τις επιτρεπόμενες ενέργειες του ηλεκτρονίου η αντικατάσταση των v και r στον τύπο (2.8), ή μόνο του r στον τύπο (2.10), θα δώσει

$$\blacktriangleright \quad E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

και απομένει να δούμε αν αυτές οι προβλέψεις ανταποκρίνονται ή όχι στα πειραματικά δεδομένα για το άτομο του υδρογόνου.

3.4. Ένας πρώτος έλεγχος της θεωρίας του Bohr

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η θεμελιώδης κατάσταση του ατόμου αντιστοιχεί στην εκλογή $n = 1$ για την οποία τόσο η ακτίνα όσο και η ενέργεια του ατόμου παίρνουν τη μικρότερη δυνατή τιμή τους. Συγκεκριμένα, θα είναι

$$\blacktriangleright \quad r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,5 \text{ \AA}, \quad E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV}$$

και είναι, βεβαίως, μια εντυπωσιακή επιτυχία της θεωρίας ότι προβλέπει σωστά τόσο το μέγεθος του ατόμου –που είναι πράγματι μισό angstrom– όσο και το έργο ιοντισμού του

$$\blacktriangleright \quad W_1 = -E_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

που ισούται, βεβαίως, με το αντίθετο της ενέργειας της θεμελιώδους «στάθμης» του και η αριθμητική τιμή του είναι όντως 13,6 eV. Στην πραγματικότητα, αν θυμηθούμε πώς προέκυψε η θεωρία του Bohr από τα εμπειρικά δεδομένα, η επιτυχής πρόβλεψη της αριθμητικής τιμής του έργου ιοντισμού

του ατόμου δεν πρέπει να θεωρηθεί έκπληξη. Αν θυμάστε, ήταν εξαρχής $E_1 = -hR = -13,6 \text{ eV}$ όπου η τιμή της σταθεράς του Rydberg, R , είχε ληφθεί από το πείραμα. Η επιτυχία στην περίπτωση αυτή συνίσταται κυρίως στη θεωρητική εξαγωγή μιας μαθηματικής έκφρασης για το μέγεθος αυτό συναρτήσσει μόνο θεμελιωδών σταθερών όπως η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου και η σταθερά του Planck. Ο τύπος $W_1 = me^4/2\hbar^2$ αποτελεί, με μια έννοια, την *ιδρυτική πράξη της σύγχρονης θεωρητικής χημείας*. Είναι η πρώτη φορά στην ιστορία που ένα καθαρά χημικό δεδομένο εξηγείται από μια θεμελιώδη φυσική θεωρία και περιγράφεται από έναν μαθηματικό τύπο.

Αναφορικά με το μέγεθος του ατόμου, η σχετική έκφραση $r_1 = \hbar^2/me^2$ είναι σήμερα γνωστή ως *ακτίνα του Bohr* και συμβολίζεται με a_0 ή, επίσης, με a_B για προφανείς λόγους ($B \equiv \text{Bohr}$). Θα είναι λοιπόν

$$\blacktriangleright \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (\text{ακτίνα του Bohr}).$$

Πολύ σημαντικές είναι, βεβαίως, και οι λεγόμενες *διεγερμένες καταστάσεις* του ατόμου για τις οποίες ο *κβαντικός αριθμός* n παίρνει τις τιμές $n = 2, 3, 4, \dots$ με αντίστοιχες ακτίνες $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ κ.ο.κ., ενώ οι σχετικές ενέργειες σε eV θα δίνονται από τον τύπο $E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$. Σύμφωνα με τον Bohr, αν το ηλεκτρόνιο του ατόμου βρεθεί σε μια από αυτές τις διεγερμένες καταστάσεις –*παραδείγματος χάριν* ως αποτέλεσμα της βίαιης σύγκρουσής του με ένα άλλο άτομο–, δεν θα παραμείνει επ’ αόριστον εκεί αλλά, ύστερα από έναν *μέσο χρόνο παραμονής*, της τάξεως των 10^{-8} sec , θα αποδιεγερθεί αποβάλλοντας την πλεονάζουσα ενέργεια υπό μορφήν ενός φωτονίου. Έτσι, π.χ., κατά τη μετάπτωση του ηλεκτρονίου από την τροχιά με $n = 2$ στην τροχιά με $n = 1$ το εκπεμπόμενο φωτόνιο θα έχει ενέργεια

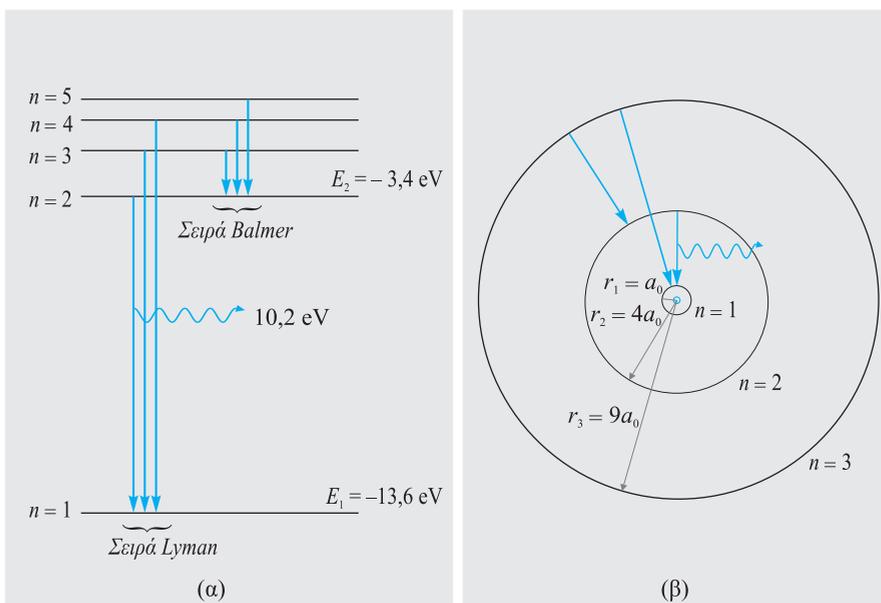
$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\frac{13,6 \text{ eV}}{2^2} \right) - \left(-\frac{13,6 \text{ eV}}{1^2} \right) = 10,2 \text{ eV}$$

και, επομένως, θα είναι ένα *υπεριώδες φωτόνιο*^(*) με μήκος κύματος

$$\lambda(\text{\AA}) = \frac{12.400}{\epsilon(\text{eV})} = \frac{12.400}{10,2} = 1.215,6 \text{ \AA}$$

το οποίο παρατηρείται πράγματι στο σχετικό τμήμα του υδρογονικού φάσματος (είναι η πρώτη γραμμή της λεγόμενης *σειράς Lyman* η οποία περιλαμβάνει τις μεταπτώσεις από όλες τις διεγερμένες στάθμες του ατόμου προς τη θεμελιώδη). Τόσο η κβάντωση των τροχιών όσο και η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου αποδίδονται πολύ παραστατικά στο Σχήμα 2.7.

^(*) Υπενθυμίζουμε ότι το ορατό φάσμα αντιστοιχεί σε ενέργειες φωτονίων από 1,6 eV έως 3 eV. Επομένως, φωτόνια με ενέργεια μεγαλύτερη των 3 eV ανήκουν στο υπεριώδες μέρος του φάσματος ενώ εκείνα με $E < 1,6 \text{ eV}$ στο υπέρυθρο.



ΣΧΗΜΑ 2.7: (α) Οι ενεργειακές «στάθμες» του ατόμου του υδρογόνου στο πλαίσιο της θεωρίας του Bohr. Οι επιτρεπόμενες ενέργειες του ηλεκτρονίου ($E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$) παριστάνονται με οριζόντιες γραμμές που κόβουν έναν νοητό κατακόρυφο άξονα ενεργειών στις προβλεπόμενες «θέσεις». Οι μεταπτώσεις του ηλεκτρονίου από μια ανώτερη στάθμη σε μια κατώτερη –τα περίφημα «κβαντικά άλματα»– αντιπροσωπεύονται από κατακόρυφα βέλη που συνδέουν ανά δύο τις ενεργειακές στάθμες. (β) Οι κβαντωμένες τροχιές του ηλεκτρονίου στο άτομο του Bohr. Οι επιτρεπόμενες ακτίνες δίνονται από τον τύπο $r_n = n^2 a_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) και τα κβαντικά άλματα ανάμεσά τους περιγράφονται ξανά από τα «συνδετικά βέλη». Και στα δύο σχήματα δείχνεται μόνο το φωτόνιο που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση $n = 2 \rightarrow n = 1$.

3.5. Αριθμητικοί υπολογισμοί στη θεωρία του Bohr.

Η σταθερά της λεπτής υφής

Συνεχίζοντας μια ανάλογη συζήτηση του προηγούμενου κεφαλαίου (§ 2.4) θα παρουσιάσουμε τώρα έναν εναλλακτικό τρόπο εκτέλεσης των αριθμητικών υπολογισμών στο πλαίσιο της θεωρίας του Bohr που είναι αφ' ενός πολύ απλούστερος και αφ' ετέρου κάνει πολύ πιο κατανοητή την τάξη μεγέθους των διαφόρων ποσοτήτων που υπεισέρχονται στην περιγραφή του ατόμου.

Το πρώτο αναγκαίο βήμα είναι να γράψουμε την ταχύτητα $v_1 = e^2/\hbar$ του ηλεκτρονίου στην πρώτη τροχιά του Bohr, στην ισοδύναμη μορφή

$$v_1 = \frac{e^2}{\hbar c} c$$

από όπου είναι αμέσως προφανές ότι η ποσότητα

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

είναι αδιάστατη και ... ακούει στο όνομα *σταθερά της λεπτής υφής*, επειδή εμφανίστηκε για πρώτη φορά κατά την περιγραφή της λεγόμενης *λεπτής υφής* των φασματικών γραμμών του ατόμου του υδρογόνου. Η αριθμητική τιμή του α είναι, βεβαίως, η ίδια σε όλα τα συστήματα μονάδων^(*) και ισούται με

$$\alpha = \frac{1}{137}$$

και είναι ένα από τα πολύ λίγα νούμερα που πρέπει να θυμάστε γιατί η χρήση της απλοποιεί εξαιρετικά τους σχετιζόμενους με τα άτομα υπολογισμούς, όπως θα δούμε σε λίγο. Επιπλέον μας δίνει μια άμεση αίσθηση της σχετικής τάξης μεγέθους διαφόρων ομοειδών μεγεθών. Ως πρώτο παράδειγμα βλέπουμε ότι η γραφή $v_1 = \alpha c$ μας λέει αμέσως ότι στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου η ταχύτητα περιφοράς του ηλεκτρονίου είναι 137 φορές μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Εκτός των άλλων αυτό το αποτέλεσμα δικαιολογεί και τον μη σχετικιστικό χειρισμό του προβλήματος.

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι από τα τέσσερα μεγέθη \hbar , m , e και c ο μόνος αδιάστατος συνδυασμός που μπορεί να κατασκευαστεί είναι η σταθερά α της λεπτής υφής. Αυτό συνεπάγεται ότι ο λόγος δύο ομοειδών μεγεθών που κατασκευάζονται από τις παραμέτρους \hbar , m , e και c θα είναι αναγκαστικά μια δύναμη του α . Δύο ομοειδή μεγέθη με διαστάσεις ταχύτητας είναι τα v_1 και c και πράγματι ισχύει, όπως είδαμε, η $v_1/c = \alpha$. Δύο χαρακτηριστικά μεγέθη με διαστάσεις ενέργειας είναι το έργο ιοντισμού W_1 και η ενέργεια ηρεμίας mc^2 του ηλεκτρονίου. Και εδώ ο αριθμητικός συντελεστής που τα συνδέει είναι πάλι μια δύναμη της σταθεράς α . Πράγματι, έχουμε

$$W_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{e^4}{2\hbar^2 c^2} mc^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 mc^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2.$$

Έτσι, αν θυμόμαστε (και πρέπει να το θυμόμαστε) ότι η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου είναι ίση με

^(*) Στο mks η έκφραση για το α προκύπτει με την αντικατάσταση $e^2 \rightarrow ke^2$, όπου $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Θα είναι δηλαδή

$$\alpha_{\text{mks}} = \alpha_{\text{cgs}} \Big|_{e^2 \rightarrow ke^2} = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}.$$

$$mc^2 \simeq 0,5 \text{ MeV},$$

τότε αντιλαμβανόμαστε αμέσως –διά γυμνού οφθαλμού– το γιατί το έργο ιοντισμού πέφτει στην περιοχή των μερικών eV.

Για υπολογισμούς τάξης μεγέθους μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις στρογγυλεμένες τιμές

$$\alpha \simeq 7 \times 10^{-3}, \quad \alpha^2 \simeq 5 \times 10^{-5}$$

οπότε, για έναν χοντρικό υπολογισμό του έργου ιοντισμού του ατόμου του υδρογόνου, θα έχουμε

$$W_I = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 \simeq \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-5} \times 0,5 \times 10^6 \text{ eV} \simeq 12,5 \text{ eV}$$

ενώ η ακριβής τιμή είναι, βεβαίως, η $W_I = 13,6 \text{ eV}$.

Ένας πιο ευθύς τρόπος να αξιοποιούμε τη σταθερά της λεπτής υφής είναι όμως ο εξής: να λύνουμε τη σχέση $e^2/\hbar c = \alpha$ ως προς e^2 –να γράφουμε δηλαδή $e^2 = \alpha \hbar c$ – και να αντικαθιστούμε το e^2 με το ίσον του στην έκφραση που θέλουμε να υπολογίσουμε. Με αυτόν τον τρόπο αφ' ενός απαλείφουμε από τον τύπο που μας ενδιαφέρει το ηλεκτρικό φορτίο –που είναι η κατ' εξοχήν σταθερά της ατομικής φυσικής της οποίας την αριθμητική τιμή ελάχιστα ενθυμούνται– και αφ' ετέρου εισάγουμε στην έκφραση που μας ενδιαφέρει την ταχύτητα c του φωτός η οποία συνδυάζεται με τη μάζα του ηλεκτρονίου για να δώσει την ενέργεια ηρεμίας του. Έτσι το πλεονέκτημα είναι διπλό. Το mc^2 είναι η ποσότητα που θυμόμαστε, και επιπλέον μετρίεται με τη σωστή μονάδα: δηλαδή σε eV. Στην περίπτωση του έργου ιοντισμού αυτή η αντικατάσταση δίνει αμέσως

$$W_I = \frac{me^4}{2\hbar^2} \Big|_{e^2=\alpha\hbar c} = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2$$

που είναι, βεβαίως, η έκφραση που χρησιμοποιήσαμε πριν. Ως ένα άλλο παράδειγμα ας δούμε πώς θα υπολογίζαμε την ακτίνα του Bohr αν αγνοούσαμε την τιμή του ηλεκτρικού φορτίου. Θα είναι τώρα

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \Big|_{e^2=\alpha\hbar c} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc} \quad (2.11)$$

από όπου με βάση τις γνωστές τιμές στο cgs – $\hbar \simeq 10^{-27}$, $m \simeq 10^{-27}$, $c = 3 \times 10^{10}$ – θα έχουμε αμέσως

$$a_0 \simeq 137 \frac{10^{-27}}{10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} \simeq 0,45 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

που είναι, βεβαίως, η «σωστή» τιμή για το a_0 . Σημειώστε επ' ευκαιρία ότι η έκφραση \hbar/mc που εμφανίστηκε στην (2.11) είναι επίσης ένα από τα γνωστά μας «μήκη». Με εξαίρεση την αντικατάσταση του h με το \hbar , είναι το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου και για να γίνεται η αναγκαία διάκριση συμβολίζεται –πώς αλλιώς;– με λ_c .^(*) Είναι δηλαδή

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc},$$

οπότε η (2.11) γράφεται επίσης ως

$$a_0 = \frac{1}{\alpha} \lambda_c \quad \text{ή} \quad \lambda_c = \alpha a_0$$

και επιβεβαιώνει, φυσικά, τον προηγούμενο ισχυρισμό μας ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε ομοειδών μεγεθών που κατασκευάζονται από την τετράδα \hbar , m , e και c θα είναι μια δύναμη της αδιάστατης σταθεράς α . Ως τελευταίο παράδειγμα ας υπολογίσουμε την ποσότητα $r_0 = e^2/mc^2$ που είναι γνωστή ως κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου και, βεβαίως, έχει διαστάσεις μήκους. Το όνομα οφείλεται στο γεγονός ότι αυτή πράγματι θα ήταν η ακτίνα του ηλεκτρονίου αν αυτό μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα σφαιρίδιο ακτίνας r_0 με φορτίο e κατανομημένο στην επιφάνειά του, οπότε η ενέργεια ηρεμίας του θα μπορούσε να αποδοθεί στην ηλεκτροστατική του ιδιοενέργεια και θα ήταν επομένως $e^2/r_0 = mc^2 \Rightarrow r_0 = e^2/mc^2$. Για τον υπολογισμό του r_0 με την τεχνική που υποδείξαμε πριν, θα είναι

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \Big|_{e^2 = \alpha \hbar c} = \alpha \frac{\hbar}{mc} = \alpha \lambda_c = \alpha^2 a_0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επίσης τη σχέση $\lambda_c = \alpha a_0$ που βρήκαμε προηγουμένως. Με $a_0 = 0,5 \text{ \AA}$, $\alpha^2 \simeq 5 \times 10^{-5}$ θα έχουμε

$$r_0 \simeq 2,5 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

που είναι ένα από τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία είχαμε επικαλεστεί νωρίτερα για να εξηγήσουμε την –κατά Bohr– απόλυτη αδυναμία της κλασικής φυσικής να εξηγήσει το μέγεθος των ατόμων.

^(*) Όπως και στην περίπτωση του $\hbar = h/2\pi$, η διαίρεση ενός φυσικού μεγέθους ή μιας φυσικής σταθεράς με 2π δηλώνεται με μια μικρή γραμμούλα πάνω στο αρχικό σύμβολο ενώ στην ονομασία του προστίθεται και ο προσδιορισμός «ανηγμένο». Έτσι μιλάμε για ανηγμένο μήκος κύματος, $\lambda = \lambda/2\pi$, ανηγμένη σταθερά του Planck, $\hbar = h/2\pi$, κ.λπ., αν και στην τελευταία περίπτωση ο λεκτικός προσδιορισμός παραλείπεται για λόγους απλότητας, εφόσον η χρήση ιδιαίτερου συμβόλου – \hbar αντί h – δεν αφήνει περιθώριο σύγχυσης.

3.6. Περί του συστήματος μονάδων: cgs έναντι mks

Η ενασχόλησή μας στα δύο προηγούμενα εδάφια με την «αριθμητική» της θεωρίας του Bohr καθιστά επίκαιρη μια συζήτηση και για το σύστημα μονάδων που έχουμε επιλέξει. Γιατί cgs και όχι mks αφού το τελευταίο τείνει πλέον να επικρατήσει ως το καθιερωμένο σύστημα μονάδων στη διδασκαλία της γενικής φυσικής; Ας σπεύσουμε λοιπόν να πούμε αμέσως ότι η επιλογή του cgs σε τούτο το βιβλίο –όπως και σε όλα σχεδόν τα βιβλία κβαντομηχανικής– έχει να κάνει με το βασικό του αντικείμενο που είναι η *φυσική του ατόμου* ή, γενικότερα, η *φυσική του μικρόκοσμου*. Όπου ο βασικός νόμος δύναμης –ο νόμος του Coulomb– είναι, βεβαίως, πολύ απλούστερος στο σύστημα cgs από ό,τι στο mks. Παραδείγματος χάριν, στο άτομο του υδρογόνου η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-πρωτονίου έχει στα δύο συστήματα τη μορφή

$$V = -\frac{e^2}{r} \quad (\text{cgs}), \quad V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (\text{mks})$$

και το πλεονέκτημα της πρώτης είναι, βεβαίως, εμφανές. Όμως το πέρασμα από το ένα σύστημα στο άλλο –εν προκειμένω από το cgs στο mks– είναι απλούστατο. Αρκεί να γράψουμε την έκφραση της ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης του mks στην πιο πυκνή μορφή

$$V = -\frac{ke^2}{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{mks})$$

από όπου είναι αμέσως φανερό ότι όλα τα αποτελέσματα που βρήκαμε προηγουμένως μετατρέπονται στο mks με την αντικατάσταση

$$e^2 \rightarrow ke^2 \quad (\text{cgs} \rightarrow \text{mks}).$$

Έτσι, παραδείγματος χάριν, για τον τύπο της ακτίνας του Bohr, $a_0 = \hbar^2/me^2$, θα έχουμε

$$a_0(\text{mks}) = a_0(\text{cgs})|_{e^2 \rightarrow ke^2} = \frac{\hbar^2}{kme^2} \equiv 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}$$

ενώ για το υπόλοιπο τυπολόγιο της θεωρίας του Bohr η παραπάνω αντικατάσταση θα δώσει

$$\left. \begin{aligned} r_n &= \frac{\hbar^2}{kme^2} n^2, & v_n &= \frac{ke^2}{\hbar} \frac{1}{n}, & E_n &= -\frac{k^2 me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \\ & & \alpha &= \frac{ke^2}{\hbar c}. \end{aligned} \right\} (\text{mks}).$$

Δεδομένου λοιπόν ότι η μετατροπή των κβαντικών τύπων από το cgs στο mks είναι τετριμμένη, και ότι η μορφή των τύπων στο cgs είναι σαφώς απλούστερη, είναι προφανές γιατί η μεγάλη πλειονότητα των φυσικών χρησιμοποιεί το cgs στο πλαίσιο της κβαντομηχανικής ενώ, βεβαίως, υιοθετεί αυτομάτως το mks όταν διδάσκει ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Στα σημαντικά πλεονεκτήματα του cgs —όταν κάνουμε κβαντομηχανική— θα πρέπει να προστεθεί και η άνεση που προσφέρει για τη χρήση διαστατικής ανάλυσης, αφού στο σύστημα αυτό οι βασικές μονάδες παραμένουν τρεις $-L, M, T-$ έναντι των τεσσάρων του mks όπου το φορτίο θεωρείται ως ανεξάρτητο φυσικό μέγεθος.

Προς διευκόλυνση του αναγνώστη που δεν είχε την ευκαιρία μέχρι τώρα να εργαστεί στο σύστημα cgs, ας σημειώσουμε ότι οι ηλεκτρικές μονάδες στο σύστημα αυτό —π.χ. η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου— δηλώνονται με την παράθεση του ακρωνυμίου $esu \equiv \text{electrostatic units}$, ενώ εξίσου καλά θα μπορούσαμε να γράφουμε και cgs αφού όλα τα ηλεκτροστατικά μεγέθη στο cgs έχουν καθαρά μηχανικές διαστάσεις. Παραδείγματος χάριν, από τον τύπο της δυναμικής ενέργειας $V = q^2/r$ είναι φανερό ότι το τετραγωνισμένο ηλεκτρικό φορτίο έχει διαστάσεις

$$[q^2] = [E] \cdot [L] = ML^3 T^{-2},$$

οπότε η αριθμητική τιμή του ηλεκτρονιακού φορτίου e στο σύστημα cgs θα μπορούσε να δοθεί σε μία από τις τρεις μορφές

$$e = \begin{cases} \rightarrow 4,802 \times 10^{-10} \text{ esu} \\ \rightarrow 4,802 \times 10^{-10} \text{ cgs} \\ \rightarrow 4,802 \times 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

και η τιμή αυτή συμπίπτει, βεβαίως, με εκείνη που θα βρίσκατε και μόνοι σας βάσει του τύπου $e^2 = \alpha \hbar c$. Ως προς τις καθαρά μηχανικές μονάδες η σχέση των δύο συστημάτων είναι, βεβαίως, γνωστή. Στο cgs μονάδα μήκους είναι το cm —έναντι του m στο mks— και μονάδα μάζας το g —έναντι του kg— ενώ η μονάδα χρόνου —το sec— είναι κοινή και στα δύο συστήματα. Για παράγωγα μεγέθη όπως η ενέργεια —όπου οι αντίστοιχες μονάδες είναι το erg (στο cgs) και το joule (στο mks)— η μετατροπή είναι απλούστατη βάσει του ορισμού τους. Συγκεκριμένα, θα είναι

$$\begin{aligned} [E] = ML^2 T^{-2} &\Rightarrow \text{joule} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 10^3 \text{ g} \cdot (10^2 \text{ cm})^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ &= 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2} \equiv 10^7 \text{ erg}. \end{aligned}$$

Θα είναι δηλαδή $1 \text{ joule} \equiv 1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$, οπότε για τη σταθερά του Planck στα δύο συστήματα θα έχουμε

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Η προσαρμογή του αναγνώστη στο σύστημα cgs είναι λοιπόν απλούστατη και δεν συνεπάγεται τίποτα περισσότερο από μια ελάχιστη αρχική προσπάθεια να «ξεχάσει» τον παράγοντα $k (= 1/4\pi\epsilon_0)$ στον νόμο του Coulomb και να απομνημονεύσει δυο-τρία βασικά νούμερα στο νέο σύστημα: Τη σταθερά του Planck ($\hbar \simeq 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$), την ταχύτητα του φωτός ($c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$) και, ίσως, τη μάζα του ηλεκτρονίου σε g ($m_e = 0,910 \times 10^{-27} \text{ g} \simeq 10^{-27} \text{ g}$).

Στην πραγματικότητα, όμως, όταν κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς σε μικροσκοπικά συστήματα, τόσο το cgs όσο και το mks είναι εξίσου «άχρηστα» διότι εκεί οι πραγματικά χρήσιμες μονάδες –όπως έχουμε εξηγήσει και αλλού– είναι το eV για την ενέργεια και το Å για το μήκος. Το περίεργο όμως είναι –αν και δεν είναι καθόλου περίεργο αν εξεταστεί λίγο βαθύτερα– ότι χρησιμοποιώντας το eV ως μονάδα ενέργειας είμαστε πολύ κοντύτερα στο σύστημα mks από ό,τι αν χρησιμοποιούσαμε τη δική του ενεργειακή μονάδα, δηλαδή το joule. Ένα απλό πρόβλημα θα μας βοηθήσει να αντιληφθούμε τι ακριβώς συμβαίνει:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3: Υπολογίστε, στο σύστημα mks, το ηλεκτρικό δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση μιας ακτίνας του Bohr από τον πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου.

Αύση: Για το ηλεκτρικό δυναμικό η απάντηση είναι προφανώς $V = 27,2 \text{ Volt}$ αφού η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $V = e^2/a_0$ και η τιμή αυτής της ποσότητας είναι 27,2 eV, όπως γνωρίζουμε. Για την ένταση \mathcal{E} ενός ηλεκτρικού πεδίου ας σημειωθεί κατ' αρχάς ότι η σχετική μονάδα του συστήματος mks είναι το volt ανά μέτρο (V/m) αφού το γινόμενο $\mathcal{E} \times$ απόσταση δίνει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων. Στην παρούσα περίπτωση θα είναι τώρα

$$\mathcal{E} = \frac{e}{a_0^2} \equiv \frac{e^2}{a_0} \frac{1}{e a_0} = 27,2 \text{ eV} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{0,5 \times 10^{-10} \text{ m}} = 5,44 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

όπου ο αριθμητικός υπολογισμός δεν ήταν στην ουσία παρά μια κατάλληλη μεταγραφή της αρχικής έκφρασης για το ηλεκτρικό πεδίο ώστε να εμφανιστεί ο ενεργειακός συνδυασμός

$$\frac{e^2}{a_0} = \frac{e^2}{(\hbar^2/mc^2)} = \frac{mc^4}{\hbar^2} = 27,2 \text{ eV}$$

που διαιρείται έπειτα με το ηλεκτρικό φορτίο e και δίνει volt και κατόπιν με το $a_0 = 0,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ για να δώσει τελικά V/m, που είναι η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα mks.

Το τελικό συμπέρασμα είναι, πιστεύουμε, σαφές. Ως προς την κομψότητα των μαθηματικών εκφράσεων και την ευχέρεια στη χρήση διαστατικών μεθόδων, το σύστημα cgs σαφώς υπερτερεί του mks στο πλαίσιο της φυσικής

του μικρόκοσμου (και όχι μόνο). Αλλά από πλευράς αριθμητικών υπολογισμών και τα δύο συστήματα είναι εξίσου ακατάλληλα αφού οι πρακτικές μονάδες eV και Å είναι ασυζητητί προτιμητέες. Το οποίο όμως μας φέρνει ξανά πίσω στο mks, αφού το eV ως ενεργειακή μονάδα είναι εγγενώς συνδεδεμένο με τη μονάδα τάσης –το volt– αυτού του συστήματος.

Σημειώστε ότι η χρήση του eV και του Å ως των κατάλληλων μονάδων ενέργειας και μήκους της ατομικής φυσικής επιβάλλει να εκφράσουμε μέσω αυτών και θεμελιώδεις σταθερές όπως το \hbar αλλά και το γινόμενο $\hbar c$ ή hc που εμφανίζεται στον βασικό τύπο $\epsilon = hc/\lambda$ και άρα έχει διαστάσεις ενέργεια επί μήκος, οπότε το χρειαζόμαστε σε μονάδες eV · Å. Με βάση τη σχέση μετατροπής $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ erg}$, $1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$ προκύπτουν αμέσως οι τιμές

$$h = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}, \quad \hbar = 6,582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

και

$$hc = 12.400 \text{ eV} \cdot \text{Å}, \quad \hbar c = 1.973 \text{ eV} \cdot \text{Å}.$$

3.7. Κβάντωση = σταθερότητα: Η ιδέα-κλειδί της θεωρίας του Bohr

Η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα, η οποία, όπως είδαμε, απορρέει άμεσα από τη συνδυαστική αρχή, εξηγεί με τον πιο αβίαστο τρόπο το μυστήριο της ατομικής σταθερότητας.

Πράγματι, αν ένα ατομικό ηλεκτρόνιο μόνο σε ορισμένες διάκριτες ενεργειακές καταστάσεις μπορεί να υπάρξει, και σε καμία άλλη, τότε η μετάβασή του από τη θεμελιώδη στάθμη στην πρώτη διεγερμένη είναι δυνατή μόνο με την απορρόφηση μιας ενέργειας τουλάχιστον ίσης με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών. Για παράδειγμα, στο άτομο του υδρογόνου, οι ενέργειες της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης στάθμης είναι, όπως είδαμε πριν

$$E_1 = -13,6 \text{ eV}, \quad E_2 = -3,4 \text{ eV}$$

και η διαφορά τους

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 10,2 \text{ eV},$$

το οποίο σημαίνει ότι για να διεγερθεί ένα άτομο υδρογόνου απαιτείται μια ενέργεια τουλάχιστον 10,2 eV.

Αν λάβουμε τώρα υπ' όψιν μας ότι η τάξη μεγέθους των ενεργειών που ανταλλάσσονται κατά τις θερμικές κρούσεις των ατόμων σε θερμοκρασία δωματίου ($T = 20^\circ \text{ C} = 293^\circ \text{ K} \simeq 300^\circ \text{ K}$) είναι μόλις^(*)

(*) Γενικότερα, αυτό που αξίζει να θυμάστε είναι ότι το kT είναι ίσο με 1 eV για $T = 11.600 \text{ K} \simeq 12.000 \text{ K}$. Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι για ένα άτομο ή μόριο ενός ιδανικού αερίου η μέση θερμική ενέργεια σε θερμοκρασία T είναι $\frac{3}{2}kT$, δηλαδή περίπου ίση με kT αν ενδιαφερόμαστε μόνο για εκτιμήσεις τάξεως μεγέθους.

$$(kT)_{\text{δοματίου}} \simeq \frac{1}{40} \text{ eV},$$

τότε είναι φανερό ότι σε μια πολύ μεγάλη περιοχή θερμοκρασιών η συντριπτική πλειονότητα των ατόμων παραμένει στη βασική στάθμη. Με άλλα λόγια, οι ενέργειες των θερμικών κρούσεων είναι αμελητέες σε σύγκριση με το ενεργειακό φράγμα των 10,2 eV που χωρίζει τις δύο στάθμες.

Η αντιπαραβολή με την κλασική περίπτωση, όπου όλο το συνεχές των ενεργειακών καταστάσεων είναι διαθέσιμο, είναι αρκετά χτυπητή. Εδώ δεν υπάρχει πια κανένα ενεργειακό χάσμα που να χωρίζει μια κατάσταση του ατόμου από μια άλλη, οπότε, οσοδήποτε ασθενείς και αν είναι οι διατομικές αλληλεπιδράσεις, θα μπορούν να προκαλέσουν μια αλλαγή στην κατάσταση του ατόμου. Έτσι, κάτω από την επίδραση των αμοιβαίων θερμικών τους κρούσεων τα άτομα θα βρίσκονταν –σαν το ποτάμι του Ηράκλειτου– σε μια κατάσταση αέναης ροής και αλλαγής, όπου κανένα δεν θα ήταν ποτέ το ίδιο με κανένα άλλο, μα ούτε και με τον εαυτό του. Αυτή καθ' εαυτή η έννοια του ατόμου ως μιας σταθερής και αναγνωρίσιμης φυσικής οντότητας δεν θα είχε κανένα απολύτως νόημα.

Η παραδοχή της κβάντωσης λύνει αυτόματα το πρόβλημα της ατομικής σταθερότητας. Στη βασική του στάθμη το άτομο είναι ευσταθές για τον απλούστατο λόγο ότι ούτε πιο κάτω μπορεί να πάει (δεν υπάρχει διαθέσιμη ενεργειακή στάθμη) ούτε όμως και πιο πάνω, λόγω του μεγάλου ενεργειακού χάσματος που χωρίζει τη βασική από την πρώτη διεγερμένη στάθμη. Έτσι –παρά το τεράστιο ενδοατομικό κενό– το άτομο, σε μια μεγάλη περιοχή θερμοκρασιών, συμπεριφέρεται κυριολεκτικά σαν μια ατσάλινη απαραμόρφωτη σφαίρα.

Όπως βλέπετε, η παραδοχή της κβάντωσης εξηγεί τόσο αβίαστα το πρόβλημα της ατομικής σταθερότητας ώστε, αντιστρέφοντας τον συλλογισμό, μπορούμε να πούμε ότι *η κβάντωση αποτελεί τη μόνη φυσιολογική ερμηνεία που μπορεί να διανοηθεί κανείς*.

Σε μια προηγούμενη συζήτησή μας, είχαμε πει ότι η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν είναι ένα ανεξήγητο καπρίτσιο της φύσης αλλά μια αναγκαία συνθήκη για έναν κόσμο όπου η ακτινοβολία δεν θα μπορεί να αποσυνθέτει διαρκώς τις μικροσκοπικές δομές της ύλης. Τώρα βλέπουμε ότι και η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα επιβάλλεται από την ίδια βαθιά αναγκαιότητα. Μια αναγκαιότητα συνυφασμένη με την ίδια την ύπαρξή μας. Ή, για να το πούμε χωρίς περιστροφές,

χωρίς την κβάντωση δεν θα υπήρχαμε.

Ένα καθαρά κλασικό σύμπαν δεν θα ήταν παρά μια άναρχη κίνηση σωματιδίων χωρίς καμιά δυνατότητα σχηματισμού ευσταθών μικροσκοπικών συστημάτων. Κατά μείζονα λόγο δεν θα ήταν δυνατή η δημιουργία μακροσκοπικής ύλης με καθορισμένες και σταθερές ιδιότητες. Και είναι, βεβαίως,

προφανές ότι χωρίς ύλη με σταθερή φυσικοχημική συμπεριφορά το φαινόμενο της ζωής έχει μηδενική πιθανότητα. *Και όμως, υπάρχουνε.* Έτσι, εκτός και αν είναι κανείς διατεθειμένος να δεχτεί ότι υπάρχουνε κατά παράβαση των φυσικών νόμων, τότε δεν έχει άλλη εκλογή παρά να δεχτεί ότι η κλασική φυσική δεν μπορεί να είναι σωστή απ' άκρου εις άκρον. Το δίλημμα είναι λοιπόν σαφές. Η εμείς είμαστε «παράνομοι» ή η κλασική φυσική είναι λάθος. Ο μόνος τρόπος να «νομιμοποιηθούμε» είναι να αναθεωρήσουμε το κλασικό σύνταγμα. Από τον καιρό του Γαλιλαίου αυτός είναι πάντα ο δρόμος της φυσικής. Όταν οι νόμοι μας έρχονται σε σύγκρουση με την πραγματικότητα, αλλάζουμε τους νόμους, όχι την ... πραγματικότητα.

Βέβαια, στο σημείο που βρισκόμαστε τώρα, το «κβαντικό σύνταγμα» δεν έχει συνταχθεί ακόμα. Ξέρουμε όμως ότι η βασική του ιδέα πρέπει να ξεκινά από τη διαπίστωση ότι ο μόνος τρόπος για να υπάρχουν σταθερά άτομα και μόρια είναι να αποκλειστούν οι βαθμιαίες και συνεχείς αλλαγές στην κατάσταση τους.

Και αυτό μπορεί να γίνει φυσιολογικά μόνο αν υπάρχει ένα διάκριτο σύνολο από τέτοιες καταστάσεις. Η κβάντωση και η ατομική σταθερότητα δεν είναι παρά οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Στο εξής λοιπόν όταν ακούτε κβάντωση πρέπει να σας ανακαλείται αυτομάτως η έννοια της σταθερότητας. Και αν επιμένουμε τόσο πολύ σε αυτό το σημείο είναι γιατί αποτελεί το κλειδί για την κατανόηση όλων των κβαντικών μυστηρίων. Διότι, όπως θα δούμε σύντομα, η κβαντομηχανική απαιτεί μια τόσο ριζική ρήξη με τις κλασικές μας προκαταλήψεις, ώστε αν δεν είμαστε σε θέση να καταλάβουμε την αναγκαιότητά της με έναν τελείως άμεσο τρόπο, βασισμένο όχι μόνο στα εργαστηριακά αποτελέσματα αλλά και στα δεδομένα της κοινής εμπειρίας, τότε δεν πρόκειται να αποβάλει ποτέ τον μυστηριώδη χαρακτήρα της. Αν όμως πειστείτε ότι οι κβαντικοί νόμοι είναι απολύτως αναγκαίοι για τη δομή του κόσμου μας, τότε θα δείτε σιγά-σιγά ότι θα σας φαίνονται τελείως φυσιολογικοί, αν όχι και αυτονόητοι. Ταυτόχρονα θα εθιστείτε σε μια αντίληψη της φυσικής που δεν αρκείται μόνο στην παθητική αποδοχή των φυσικών νόμων αλλά αναρωτιέται και για τη βαθύτερη αναγκαιότητα η οποία τους «επιβάλλει». Γιατί ας μην ξεχνάμε ότι η φυσική βασίζεται από πολύ παλιά σε μια θρησκευτική σχεδόν πίστη στην οικονομία της φύσης. Να τι έλεγε ο Αριστοτέλης

«Η φύση δεν κάνει τίποτε το άσκοπο, τίποτε το περιττό.»

Και ο Λεύκιππος, λίγο παλιότερα,

«Όλα γίνονται από λόγο και ανάγκη.»

Στα δύομισυ χιλιάδες χρόνια που μεσολάβησαν από τότε, αυτή η πεποίθηση δεν διανεύστηκε ούτε μια φορά. Η κβαντική θεωρία αποτελεί την πιο πανηγυρική της δικαίωση.

3.8. Κριτική της θεωρίας του Bohr

W. PAULI: Η όλη υπόθεση είναι σαν παραμύθι. Αν πραγματικά υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως η τροχιά του ηλεκτρονίου, τότε το ηλεκτρόνιο θα πρέπει προφανώς να περιφέρεται περιοδικά με μια ορισμένη συχνότητα. Όμως, όπως ξέρουμε από την ηλεκτροδυναμική, ένα ηλεκτρικό φορτίο σε περιοδική κίνηση πρέπει να ακτινοβολεί φως με την ίδια συχνότητα. Μα αυτό υποτίθεται πως δεν συμβαίνει με το ηλεκτρόνιο. Αντίθετα, ισχυριζόμαστε ότι η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτός βρίσκεται κάπου μεταξύ της τροχιακής συχνότητας πριν το μυστήριο άλμα και της τροχιακής συχνότητας μετά το άλμα. Όλα αυτά είναι καθαρή τρέλα.

W. HEISENBERG: Όμως, παρ' όλο που είναι τρέλα, έχει μια μέθοδο μέσα της.

Αν αυτά τα καταραμένα κβαντικά άλματα πρόκειται στ' αλήθεια να παραμείνουν στη φυσική, τότε εγώ το μετανιώνω που ανακατεύτηκα ποτέ μου με την κβαντική θεωρία.

E. SCHRÖDINGER (συνομιλία με τον Bohr)

Η κβαντική θεωρία μου προκαλεί αισθήματα τελείως παρόμοια με τα δικά σου. Θα έπρεπε κανείς στ' αλήθεια να ντρέπεται για τέτοιες επιτυχίες, αποκτημένες με τη βοήθεια του Ιησουϊτικού κανόνα: «Μη γνώτω η αριστερά σου τι ποιεί η δεξιά σου».

A. EINSTEIN (επιστολή στον M. Born, 1919)

Η θεωρία του Bohr γνώρισε αρχικά σημαντικές επιτυχίες, ιδιαίτερα στη σωστή πρόβλεψη των φασμάτων εκπομπής των υδρογονοειδών ιόντων, όπως το He^+ , καθώς και των αλκαλικών ατόμων, που μοιάζουν αρκετά με το υδρογόνο, μια και έχουν ένα μόνο ηλεκτρόνιο στην εξωτερική τους στιβάδα. Με μια απλή επέκταση της θεωρίας εξηγήθηκαν επίσης τα φάσματα ταλάντωσης και περιστροφής των διατομικών μορίων. Όμως πολύ γρήγορα φάνηκαν και οι αδυναμίες της, ιδιαίτερα στη μελέτη των μη αλκαλικών ατόμων, που το φάσμα τους διαφέρει αρκετά από το υδρογονικό.

Επίσης, η θεωρία του Bohr δεν ήταν σε θέση ούτε καν να καταπιαστεί με το πολύ σημαντικό ζήτημα της πρόβλεψης της σχετικής έντασης των φασματικών γραμμών. Έξω από τα όριά της ήταν ακόμη και η μελέτη των μη περιοδικών κινήσεων όπως, π.χ., η σκέδαση ενός ηλεκτρονίου πάνω σε ένα άτομο, που η περιγραφή της είναι αναγκαία για την κατανόηση του πειράματος Frank - Hertz^(*) (1914).

^(*) Κρούσεις ηλεκτρονίων ορισμένης ενέργειας με τα άτομα ενός αερίου σε έναν σωλήνα χαμηλής πίεσης. Τα ηλεκτρόνια χάνουν απότομα ενέργεια μόλις γίνουν ικανά να διεγείρουν τα άτομα του αερίου από τη θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη τους.

Ωστόσο, πέρα από τις πειραματικές δυσκολίες και το περιορισμένο πεδίο εφαρμογής της, η θεωρία του Bohr μπορεί να κριτικαριστεί και σε ένα καθαρά επιστημολογικό επίπεδο. Μπορεί να πει κανείς ότι ουσιαστικά πρόκειται για ένα ετερόκλητο μείγμα από μη κλασικές παραδοχές (όπως η παραδοχή της κβάντωσης) διατυπωμένες όμως μέσα σε ένα καθαρά κλασικό εννοιολογικό πλαίσιο.

Για παράδειγμα, στη θεωρία του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, ενώ από τη μια μεριά διατηρείται η κλασική έννοια της τροχιάς για την περιγραφή της κίνησης του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα, από την άλλη διατυπώνεται η αυθαίρετη παραδοχή ότι «στις επιτρεπόμενες τροχιές το άτομο δεν ακτινοβολεί», χωρίς να εξηγείται ο λόγος για τον οποίο η κλασική ηλεκτροδυναμική παύει να ισχύει σε αυτή την περίπτωση. Ή, για να το πούμε με πιο οικείους όρους: για τη θεωρία του Bohr ναί μεν το κλασικό σύνταγμα ισχύει, πλην όμως ορισμένα του άρθρα όπως, π.χ., αυτό που αφορά την ακτινοβολία των ηλεκτρονίων, αναστέλλονται ... μέχρι νεότερας διαταγής!

Ύστερα είναι και αυτά τα μυστήρια κβαντικά άλματα από τη μια τροχιά στην άλλη. Υποτίθεται ότι το ηλεκτρόνιο ούτε στην αρχική ούτε στην τελική τροχιά ακτινοβολεί. Άρα θα ακτινοβολεί καθ' οδόν. Έτσι τουλάχιστον λέει ο κοινός, δηλαδή ο κλασικός, νους. Όμως, οποιαδήποτε και αν είναι η μορφή της κίνησης που οδηγεί το ηλεκτρόνιο από τη μια επιτρεπόμενη τροχιά στην άλλη, θα είναι αναγκαστικά απεριοδική και επομένως η εκπεμπόμενη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία θα αποτελείται από ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων ... όπερ άτοπον!

Κατά τον Pauli, *«όλα αυτά είναι μια καθαρή τρέλα»*. Όμως, μια πολύ έξυπνη τρέλα που *«έχει μια μέθοδο μέσα της»*, όπως πολύ εύστοχα αντιλέγει ο Heisenberg. Έτσι το πρόβλημα που τίθεται πια καθαρά στους φυσικούς γύρω στις αρχές της τρίτης δεκαετίας του προηγούμενου αιώνα είναι τούτο: *πώς από την κβαντική θεωρία του Bohr να κρατήσουν τη μέθοδο και να πετάξουν ... την τρέλα.*

Φυσικά, όπως συμβαίνει πάντα σε παρόμοιες περιπτώσεις, το ζήτημα είναι πώς ξεχωρίζει κανείς την ήρα από το σιτάρι. Όπως φάνηκε όμως από την προηγούμενη συζήτηση, ο «παραλογισμός» της θεωρίας του Bohr πήγαζε αποκλειστικά από την επιμονή μας να εφαρμόσουμε στην περιοχή του ατομικού μικρόκοσμου την καθαρά κλασική έννοια της τροχιάς. Ο αδύνατος κρίκος στη θεωρία του Bohr βρίσκεται λοιπόν στη δεύτερη συνθήκη και ειδικότερα στην εισαγωγή της έννοιας των κβαντωμένων τροχιών για την περιγραφή των επιτρεπόμενων ενεργειακών καταστάσεων.

Από την άλλη μεριά η έννοια της ενεργειακής κβάντωσης καθ' εαυτήν έχει ακλόνητο πειραματικό υπόβαθρο. Όπως είδαμε, η πρώτη συνθήκη του Bohr ξεπηδά τόσο αβίαστα από την εμπειρική συνδυαστική αρχή, ώστε δεν έχουμε κανέναν απολύτως λόγο να θέσουμε υπό αμφισβήτηση την εγκυρότητά της. Επιπλέον, το κεντρικό μυστήριο του μικρόκοσμου, δηλαδή το πρό-

βλημα της ατομικής σταθερότητας, μόνο με την υπόθεση της κβάντωσης μπορεί να εξηγηθεί φυσιολογικά. Όσο για τις κβαντωμένες τροχιές, αυτές μάλλον αποτελούν μια καθαρή εικασία που δεν μπορεί να υποστηριχτεί άμεσα από κανένα πειραματικό δεδομένο. Στην καλύτερη περίπτωση, η δεύτερη συνθήκη του Bohr μπορεί να θεωρηθεί ως ένας σχετικά επιτυχής «ευρετικός κανόνας» για τον υπολογισμό των επιτρεπόμενων ενεργειών. Όμως δεν φαίνεται πιθανό ότι θα επιζήσει ως οργανικό μέρος μιας συνεπούς θεωρίας των μικροσκοπικών φαινομένων.

3.9. Παραδείγματα εφαρμογής της θεωρίας του Bohr

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κρίσιμο βήμα στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας –τη διατύπωση της υπόθεσης των υλικών κυμάτων από τον de Broglie– είναι σκόπιμο να εξετάσουμε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της θεωρίας του Bohr σε προβλήματα «λίγο» διαφορετικά από το άτομο του υδρογόνου, ώστε να γίνει σαφής τόσο η ευρύτητα των πιθανών εφαρμογών όσο και η βασική απλότητα της θεωρίας. Είναι σκόπιμο να παρουσιάσουμε αυτές τις εφαρμογές υπό μορφήν προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4: Σε ορισμένα απλά μοντέλα του πυρήνα γίνεται δεκτό ότι όλα τα νουκλεόνια κινούνται υπό την επίδραση μιας κοινής κεντρικής δύναμης

$$F = -kr \quad (1)$$

που το μέγεθός της είναι ανάλογο της απομάκρυνσης από την αρχή, από όπου και ο χαρακτηρισμός της ως *τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή*. Εφαρμόστε τη θεωρία του Bohr για τη δύναμη (1) για να υπολογίσετε τις ακτίνες των επιτρεπόμενων τροχιών καθώς και τις ταχύτητες περιφοράς και τις επιτρεπόμενες ενέργειες ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται υπό την επίδραση αυτής της δύναμης.

Λύση: Σύμφωνα με τη δεύτερη συνθήκη του Bohr θα επιτρέπονται μόνο εκείνες οι (κυκλικές) τροχιές για τις οποίες η στροφορμή $\ell = mvr$ του σωματιδίου θα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς \hbar του Planck. Θα είναι δηλαδή

$$mvr = n\hbar \quad (2)$$

ενώ θα ισχύει ταυτόχρονα και ο νόμος του Νεύτωνα

$$m \frac{v^2}{r} = |F| = kr. \quad (3)$$

Όπως και στο άτομο του υδρογόνου, οι (2) και (3) συναποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους –τα v και r – που λύνεται πολύ εύκολα με αποτέλεσμα

$$r_n = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{n}, \quad v_n = \omega r_n = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{m}} \sqrt{n} \quad (4)$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ η κλασική συχνότητα ταλάντωσης ενός αρμονικού ταλαντωτή με σταθερά ελατηρίου k και μάζα m . Ως προς τις επιτρεπόμενες ενέργειες θα είναι κατ' αρχάς

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

όπου

$$F = -\frac{dV}{dr} = -kr \Rightarrow V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (5)$$

οπότε η αντικατάσταση των (4) στην (5) θα δώσει ως επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας τις

$$E_n = \hbar\omega \cdot n \equiv hf \cdot n, \quad (6)$$

δηλαδή τα ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας

$$\epsilon = \hbar\omega = hf. \quad (7)$$

Το γεγονός ότι οι (6) και (7) είναι τυπικά πανομοιότυπες με τη συνθήκη κβάντωσης του Planck για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, δεν είναι εντελώς τυχαίο. Ένα στάσιμο ΗΜ κύμα καθορισμένης συχνότητας μέσα σε μια κοιλότητα είναι επίσης ένας αρμονικός ταλαντωτής με μόνη διαφορά ότι τα ταλαντευόμενα φυσικά μεγέθη δεν είναι πλέον η θέση ή η ορμή ενός σωματιδίου αλλά το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο της κοιλότητας. Πρόκειται όμως για επουσιώδη διαφορά που δεν αναιρεί τη βασική ομοιότητα των δύο προβλημάτων. Αποκαλύπτεται έτσι μια ενδιαφέρουσα «υπόγεια σύνδεση» ανάμεσα στη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για τα ηλεκτρόνια και τη συνθήκη κβάντωσης του Planck για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5: Εφαρμόστε τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις επιτρεπόμενες ενέργειες ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται υπό την επίδραση μιας ελκτικής κεντρικής δύναμης της μορφής

$$F = -g \quad (1)$$

δηλαδή ανεξάρτητης από την απόσταση r . Σε μια πολύ χονδρική προσέγγιση, ο τύπος (1) περιγράφει τη δύναμη μεταξύ των κουάρκ σε ορισμένες δέσμιες καταστάσεις τους γνωστές ως *κουαρκόνια*.

Λύση: Το σύστημα των δύο εξισώσεων που πρέπει να λύσουμε τώρα είναι το

$$mvr = n\hbar, \quad m\frac{v^2}{r} = g \quad (2)$$

το οποίο λύνεται αμέσως με αποτέλεσμα

$$r_n = \left(\frac{\hbar^2}{gm}\right)^{1/3} n^{2/3}, \quad v_n = \left(\frac{\hbar g}{m^2}\right)^{1/3} n^{1/3}. \quad (3)$$

Για την ολική ενέργεια $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$ θα είναι κατ' αρχάς

$$F = -\frac{dV}{dr} = -g \Rightarrow V = gr \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + gr \quad (4)$$

οπότε η αντικατάσταση των (3) στην (4) θα δώσει

$$E_n = \frac{3}{2} \left(\frac{\hbar^2 g^2}{m} \right)^{1/3} n^{2/3} \quad (5)$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6: Υπολογίστε (σε eV) τα έργα ionτισμού των τριών πρώτων υδρογονοειδών ατόμων $-\text{He}^+$, Li^{++} και Be^{+++} — καθώς και τις αντίστοιχες ακτίνες τους.

Λύση: Αν και υπονοείται από τα παραπάνω, ας διευκρινίσουμε κατ' αρχάς ότι τα λεγόμενα υδρογονοειδή άτομα δεν είναι παρά ιόντα βαρύτερων ατόμων από τα οποία έχουν αφαιρεθεί όλα τους τα ηλεκτρόνια εκτός από ένα. Το υδρογονοειδές άτομο είναι, επομένως, ταυτόσημο με το υδρογόνο με μόνη διαφορά ότι το πρώτο έχει Z πρωτόνια στον πυρήνα του και άρα πυρηνικό φορτίο Ze . Η δύναμη Coulomb την οποία δέχεται το ηλεκτρόνιο θα είναι λοιπόν τώρα ίση με $F = (Ze) \cdot e/r^2 \equiv Ze^2/r^2$ έναντι της e^2/r^2 για το υδρογόνο. Είναι φανερό επομένως ότι η εφαρμογή της θεωρίας του Bohr σε ένα τυχόν υδρογονοειδές άτομο με ατομικό αριθμό Z θα δώσει τα «ίδια» αποτελέσματα με το άτομο του υδρογόνου, με τη διαφορά ότι όπου e^2 θα πρέπει να «μπει» το Ze^2 . Θα πρέπει δηλαδή να γίνει παντού η αντικατάσταση $e^2 \rightarrow Ze^2$. Έτσι, παραδείγματος χάριν, για το έργο ionτισμού $W_1 = me^4/2\hbar^2$ θα έχουμε

$$W_1(Z) = W_1(H)|_{e^2 \rightarrow Ze^2} = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} = Z^2W_1(H) = Z^2 \cdot 13,6 \text{ eV}$$

και για τις αντίστοιχες ακτίνες

$$a_0(Z) = a_0(H)|_{e^2 \rightarrow Ze^2} = \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{1}{Z} \cdot 0,5 \text{ \AA}.$$

Ειδικότερα, για τα έργα ionτισμού των He^+ (απλά ionτισμένο ήλιο), Li^{++} (διπλά ionτισμένο λίθιο) και Be^{+++} (τριπλά ionτισμένο βηρύλλιο), η πρόβλεψή μας είναι

$$W_1(\text{He}^+) = Z^2 \cdot 13,6 \text{ eV}|_{Z=2} = 54,4 \text{ eV}$$

$$W_1(\text{Li}^{++}) = 122,4 \text{ eV}, \quad W_1(\text{Be}^{+++}) = 217,6 \text{ eV}$$

και είναι όντως σε πλήρη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Ως προς το σύνολο των επιτρεπόμενων ενεργειών ενός υδρογονοειδούς ατόμου, αυτό θα δίνεται από τον τύπο

$$E_n(Z) = E_n(H)|_{e^2 \rightarrow Ze^2} = Z^2 E_n(H) = -\frac{Z^2 \cdot 13,6}{n^2} \text{ eV}$$

και ειδικότερα για το He^+ από τον

$$E_n(\text{He}^+) = -\frac{54,4}{n^2} \text{eV}$$

και είναι επίσης μια πρόβλεψη της θεωρίας του Bohr που βρίσκεται σε θεαματική συμφωνία με τις «σκοτεινές φασματικές γραμμές» που παρατηρούνται στο φάσμα απορρόφησης του Ήλιου και οι οποίες αποδίδονται στην παρουσία ιόντων He στην ηλιακή ατμόσφαιρα. Μάλιστα η επιτυχής εξήγηση αυτών των γραμμών θεωρήθηκε ως ένας από τους αρχικούς θριάμβους της θεωρίας του Bohr που συνέβαλαν αποφασιστικά στην καθιέρωσή της.

4. Ο κυματοσωματιδιακός δυΪσμός της ύλης: Η υπόθεση των υλικών κυμάτων

4.1. Η υπόθεση de Broglie

Είχα τελείως πεισθεί ότι ο κυματοσωματιδιακός δυΪσμός που ανακαλύφθηκε από τον Einstein στη θεωρία του για τα φωτεινά κβάντα είναι απόλυτα γενικός και εκτείνεται σε όλη τη φυσική πραγματικότητα. Έτσι, μου φαινόταν σίγουρο ότι η κίνηση ενός σωματιδίου οποιουδήποτε είδους (φωτόνιο, ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο κ.λπ.) συνοδεύεται πάντα και από τη διάδοση ενός κύματος.

L. DE BROGLIE

Όπως είδαμε πριν, αν υποβάλουμε τη θεωρία του Bohr σε εξονυχιστικό –εμπειρικό και επιστημολογικό– έλεγχο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η υπόθεση της κβάντωσης των ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα έχει πολύ γερές βάσεις και, επομένως, πρέπει να αποτελέσει το «σημείο εκκίνησης» στην αναζήτηση της θεμελιώδους θεωρίας του μικρόκοσμου.

Αντίθετα, η υπόθεση των κβαντωμένων τροχιών έχει πολύ σαθρά στηρίγματα και μας οδηγεί συνεχώς σε έναν φαύλο κύκλο εννοιολογικών αντιφάσεων. Η ζητούμενη θεμελιώδης θεωρία δεν μπορεί να είναι λοιπόν ένα αμάλγαμα από κλασικές και μη έννοιες ούτε και μια ανώδυνη τροποποίηση της κλασικής φυσικής, αλλά πρέπει να βασίζεται σε μια θεμελιακά διαφορετική αντίληψη της ατομικής πραγματικότητας.

Υπάρχει κανένας «φυσιολογικός» τρόπος να εξηγήσουμε την ενεργειακή κβάντωση χωρίς να εισαγάγουμε την κλασικής προέλευσης έννοια των κβαντωμένων τροχιών; Αυτό είναι το μεγάλο εκκρεμές ερώτημα στη φυσική του 1920-23. «Και ο ευρών αμειψήσεται!»

Την απάντηση θα δώσει ο de Broglie το 1923, ακολουθώντας ένα σκεπτικό που είναι σε αδρές γραμμές το εξής:

Το φαινόμενο της κβάντωσης μιας φυσικής ποσότητας δεν είναι κατ' αρχάς καθόλου καινούριο στη φυσική. Αντίθετα, ήταν πολύ γνωστό στην κλασική κυματική θεωρία, μόνο που περιοριζόταν σε καθαρά κυματικά μεγέθη όπως η συχνότητα και το μήκος κύματος. Παραδειγματος χάριν, σε ένα χωρικά εντοπισμένο στάσιμο κύμα (σκεφτείτε την περίπτωση της χορδής) αυτά τα μεγέθη μπορούν να πάρουν μόνο μια διάκριτη ακολουθία τιμών και καμιά άλλη.

Αν λοιπόν κάνουμε την παράτολμη, και ασαφή ακόμα, υπόθεση ότι η κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα έχει κυματικό χαρακτήρα, τότε βλέπουμε να ανοίγει ένας δρόμος προς την εξήγηση του μυστηρίου της κβάντωσης. Αν, ειδικότερα, η ενέργεια του ηλεκτρονίου συμβαίνει να συνδέεται με τη συχνότητα του αντίστοιχου κύματος με μια σχέση όπως η $E = hf$ που ισχύει για το φως, τότε η κβάντωση της συχνότητας θα συνεπάγεται υποχρεωτικά και την κβάντωση της ενέργειας του ηλεκτρονίου.

Προς την ίδια κατεύθυνση μας οδηγεί και μια διαφορετική γραμμή σκέψης, που έχει ως αφετηρία της μια από τις πιο γόνιμες «προκαταλήψεις» της φυσικής επιστήμης: την απαίτηση της μέγιστης δυνατής ενότητας και οικονομίας των φυσικών νόμων.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, η κλασική φυσική χαρακτηρίζεται από μια απόλυτη διχοτόμηση του κόσμου σε δύο αλληλοαποκλειόμενες φυσικές οντότητες: τα σωματίδια και τα *ηλεκτρομαγνητικά κύματα*. Τα σωματίδια έχουν καθαρά σωματιδιακή συμπεριφορά, δηλαδή κινούνται πάνω σε καλά καθορισμένες τροχιές, ενώ τα *ηλεκτρομαγνητικά πεδία* διαδίδονται σύμφωνα με τους νόμους της κυματικής κίνησης. Το ασυμβίβαστο ανάμεσα σε αυτές τις δύο οντότητες απορρέει από την προφανή διαπίστωση ότι το σωματίδιο είναι ένας τέλει εντοπισμένος και *αδιαίρετος* κόκκος ύλης ενώ ένα πεδιακό κύμα είναι *διάχυτο στον χώρο* και μπορεί να διασπαστεί σε δύο ξεχωριστά κυματοπακέτα που καθένα τους παίρνει ένα μέρος από την ενέργεια ή την ορμή του αρχικού κύματος. Αν το θέλετε επιγραμματικά: *ένα σωματίδιο είναι εντοπισμένο και αδιαίρετο ενώ ένα κύμα είναι εκτεταμένο και διαιρετό*.

Με την υπόθεση του Einstein για τα φωτόνια, αυτή η κλασική διχοτόμηση του κόσμου φαίνεται να καταρρέει. Μια φυσική οντότητα όπως το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που στο πλαίσιο της κλασικής φυσικής έχει αποκλειστικά κυματικό χαρακτήρα, αποκτά ταυτόχρονα και σωματιδιακό. Μήπως λοιπόν η διάκριση σωματίδιο-κύμα δεν είναι και τόσο απόλυτη; Και αν ναι, γιατί να καταργείται μονομερώς, δηλαδή μόνο από την πλευρά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου; Γιατί και τα σωματίδια που στην κλασική φυσική έχουν μόνο σωματιδιακή συμπεριφορά να μην έχουν ταυτόχρονα και κυματική;

Εκτός των άλλων υπάρχουν λοιπόν και θεμελιώδεις λόγοι . . . δικαιοσύνης και τάξης που μας αναγκάζουν να επιτρέψουμε και στα σωματίδια να έχουν (αν θέλουν) διπλή ζωή. Και από ό,τι δείχνουν τα πράγματα, αποφάσισαν να κάνουν χρήση αυτού του δικαιώματος!

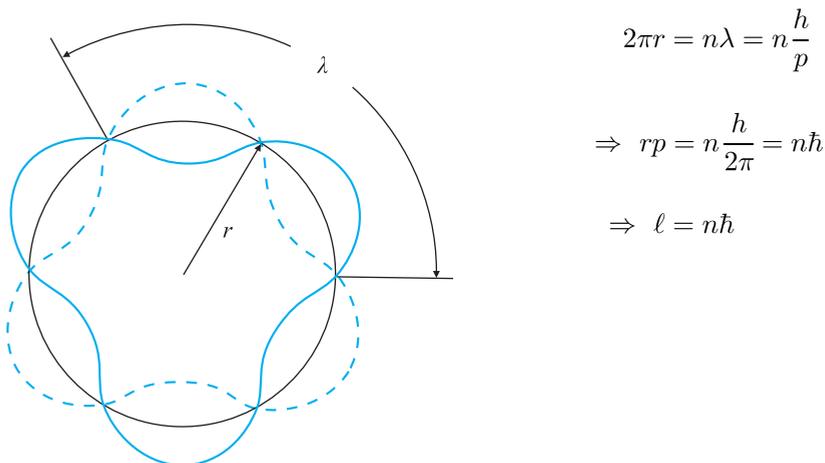
Έτσι φτάνουμε αισίως στην περίφημη αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού της ύλης (de Broglie, 1923):

Η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού της ύλης: Όλα τα φυσικά σωματίδια έχουν και κυματική συμπεριφορά παράλληλα με τη σωματιδιακή. Είναι σωματίδια και κύματα ταυτόχρονα. Οι σχέσεις που συνδέουν τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά E και p με τα κυματικά f και λ είναι οι

▶
$$f = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

είναι δηλαδή οι ίδιες με εκείνες που ισχύουν για το φως αλλά λυμένες ως προς f και λ , αφού το κύμα είναι τώρα η παράγωγη ιδιότητα.

Ως έναν πρώτο έλεγχο της υπόθεσης de Broglie ας δούμε αν μπορεί να συναχθεί από αυτήν η συνθήκη κβάντωσης του Bohr, οπότε η τελευταία δεν θα είναι παρά μια απλή συνέπεια της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων. Πράγματι, όπως θα δείξουμε αμέσως, η συνθήκη $\ell = n\hbar$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη δημιουργίας στάσιμων ηλεκτρονιακών κυμάτων γύρω από τον πυρήνα. Όπως είναι φανερό από το Σχήμα 2.8, για να είναι δυνατός ο σχηματισμός τέτοιων κυμάτων πρέπει το μήκος της νοητής περιφέρειας, κατά



ΣΧΗΜΑ 2.8: Η συνθήκη κβάντωσης του Bohr ως συνέπεια της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων. Η (νοητή) περιφέρεια κατά μήκος της οποίας σχηματίζεται το ηλεκτρονιακό στάσιμο κύμα πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος de Broglie.

μήκος της οποίας σχηματίζεται το στάσιμο κύμα να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος. Δηλαδή

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (2.12) το λ με h/p , βάσει της σχέσης του de Broglie, παίρνουμε

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow rp = n \frac{h}{2\pi} \equiv n\hbar$$

και, δεδομένου ότι $\ell = r \cdot p$ (κυκλικές τροχιές), θα έχουμε τελικά

$$\ell = \ell_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr.

Όπως βλέπετε, η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων των ατομικών ηλεκτρονίων, η οποία είναι αναγκαία για την εξήγηση της ατομικής σταθερότητας, εξηγείται με τη σειρά της τελείως αβίαστα με την υπόθεση του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης. Σε συνδυασμό και με τα θεωρητικά επιχειρήματα του de Broglie για μια ενοποιητική εικόνα του κόσμου, όπου όλα θα είναι σωματίδια και κύματα ταυτόχρονα, είναι φανερό ότι η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης έχει σοβαρές πιθανότητες να είναι η πραγματικά θεμελιώδης εξήγηση των ατομικών μυστηρίων. Έχουμε, έτσι, κάθε λόγο να επιζητήσουμε τον άμεσο πειραματικό της έλεγχο. Θα το κάνουμε αφού δούμε πρώτα μερικές αριθμητικές εφαρμογές της.

4.2. Αριθμητικοί υπολογισμοί με υλικά κύματα: Πρακτικοί τύποι, τάξεις μεγέθους και φυσικές εφαρμογές

Το πρώτο αναγκαίο βήμα για τη σωστή εκτέλεση υπολογισμών με υλικά κύματα είναι να μεταγράψουμε τον τύπο $\lambda = h/p$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε να μας δίνει το μήκος κύματος του σωματιδίου κατευθείαν σε Å, αν γνωρίζουμε την ενέργειά του σε ηλεκτρονιοβόλτ. Διότι, βεβαίως, αυτό που θα μας δίνεται για ένα σωματίδιο όπως, π.χ., το ηλεκτρόνιο, δεν θα είναι η ταχύτητα ή η ορμή του αλλά η ενέργειά του σε eV, αφού η σχετική δέσμη δημιουργείται με επιτάχυνση σε μια κάποια διαφορά δυναμικού «τόσων» volt. Γι' αυτόν τον σκοπό μετασχηματίζουμε τον τύπο $\lambda = h/p$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 \cdot E}} = \frac{12.400 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{\sqrt{2 \times 0,5 \times 10^6 \text{ eV} \times E(\text{eV})}} \\ &= \frac{12,4}{\sqrt{E(\text{eV})}} \text{ Å}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε, προφανώς, τη μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E = p^2/2m \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$ και εν συνεχεία πολλαπλασιάσαμε αριθμητή και παρονομαστή με c ώστε αφ' ενός να εμφανιστεί το mc^2 στον παρονομαστή και αφ' ετέρου η σύνθετη σταθερά hc στον αριθμητή, που η τιμή της, σε $\text{eV} \cdot \text{\AA}$, μας είναι ήδη γνωστή. (Εμφανίζεται στη σχέση $\epsilon = hf = hc/\lambda$ για τα φωτόνια, όπου βρήκαμε ότι είναι $\epsilon(\text{eV}) = 12.400/\lambda(\text{\AA})$ και επομένως $hc = 12.400 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$.) Σύμφωνα με την (2.13) θα έχουμε λοιπόν για τα ηλεκτρόνια τον χρηστικό τύπο

$$\lambda_e(\text{\AA}) = \frac{12,4}{\sqrt{E(\text{eV})}} \quad (2.14)$$

ενώ για τα πυρηνικά σωματίδια πρωτόνιο και νετρόνιο (\equiv νουκλεόνια) θα είναι

$$\lambda_N(\text{\AA}) = \lambda_e(\text{\AA}) \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = \frac{\lambda_e(\text{\AA})}{\sqrt{1.836}} \simeq \frac{\lambda_e(\text{\AA})}{43}, \quad (2.15)$$

όπου πήραμε, βεβαίως, υπ' όψιν ότι είναι $m_p \simeq m_n \simeq 1.836m_e$ και ότι η εξάρτηση του μήκους κύματος από τη μάζα είναι της μορφής $1/\sqrt{m}$. Σύμφωνα με την (2.15) το μήκος κύματος de Broglie ενός νουκλεονίου είναι περίπου 43 φορές μικρότερο από το αντίστοιχο μήκος κύματος ενός ηλεκτρονίου της ίδιας ενέργειας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη (2.14) ο ανάλογος τύπος για τα νουκλεόνια θα είναι λοιπόν ο

$$\lambda_N(\text{\AA}) = \frac{0,289}{\sqrt{E(\text{eV})}} \simeq \frac{0,3}{\sqrt{E(\text{eV})}}. \quad (2.16)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7: Βεβαιωθείτε ότι ο τύπος (2.14) δίνει το σωστό αποτέλεσμα (ποιο είναι αυτό;) για το ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη τροχιά του ατόμου του υδρογόνου.

Λύση: Σύμφωνα με τη συνθήκη δημιουργίας στάσιμων ηλεκτρονιακών κυμάτων, πάνω σε μια (νοητή) τροχιά ακτίνας r ($2\pi r = n\lambda$) θα έχουμε για $n = 1$ (θεμελιώδης τροχιά) ότι $\lambda_e = 2\pi r = 2\pi a_0 \simeq 3,14 \text{\AA}$. Επομένως αυτό είναι το αποτέλεσμα που πρέπει να δίνει ο τύπος (2.14) αν όπου E θέσουμε την *κινητική ενέργεια* $K = (1/2)mv^2$ του ηλεκτρονίου στην πρώτη τροχιά του Bohr. Όμως το K υπολογίζεται πολύ εύκολα βάσει της σχέσης

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -13,6 \text{ eV} \quad (1)$$

σε συνδυασμό με τον νόμο του Νεύτωνα

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow mv^2 = \frac{e^2}{r}, \quad (2)$$

οπότε η αντικατάσταση του e^2/r στην (1) με mv^2 , λόγω της (2), θα δώσει αμέσως

$$-\frac{1}{2}mv^2 = -13,6 \text{ eV} \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = 13,6 \text{ eV}$$

και απομένει έτσι να ελεγχθεί ότι για $E = K = 13,6 \text{ eV}$ ο τύπος (2.14) θα δώσει πράγματι το σωστό μήκος κύματος, δηλαδή $3,14 \text{ \AA}$. Το οποίο όντως και δίνει.

Όμως το παραπάνω πρόβλημα είναι χρήσιμο και ως οδηγός σχετικά με την αναμενόμενη τάξη μεγέθους του μήκους κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων. Η σωστή τάξη μεγέθους προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου θα έχει μια κινητική ενέργεια συγκρίσιμη με την ολική –δηλαδή μερικά eV– και ότι το μήκος κύματός του θα πρέπει να είναι ίσο με την περίμετρο της τροχιάς του, δηλαδή λίγα \AA . Γνωρίζουμε λοιπόν ότι *ηλεκτρόνια ενέργειας μερικών eV θα έχουν μήκος κύματος de Broglie της τάξεως των μερικών \AA .*

Ταυτόχρονα αντιλαμβανόμαστε μια βασική διαφορά μεταξύ ηλεκτρονίων και φωτονίων ως προς την ενέργεια που απαιτείται για να επιτευχθεί ένα δεδομένο μήκος κύματος. Η σύγκριση των σχετικών τύπων είναι πολύ διδακτική από αυτή την άποψη

$$\lambda_e(\text{\AA}) = \frac{12,4}{\sqrt{E(\text{eV})}}, \quad \lambda_\gamma(\text{\AA}) = \frac{12.400}{\epsilon(\text{eV})}.$$

Για να επιτύχουν μήκος κύματος της τάξεως των μερικών angstrom τα μεν ηλεκτρόνια χρειάζεται να έχουν ενέργεια μερικών eV ενώ τα φωτόνια μερικών χιλιάδων eV. Μια άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι η ιδέα του *ηλεκτρονικού μικροσκοπίου*. Όπως είναι γνωστό από την οπτική, η διακριτική ικανότητα ενός μικροσκοπίου περιορίζεται από το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος. Για ένα δεδομένο λ δεν μπορούμε να δούμε λεπτομέρειες με διάσταση d μικρότερη ή ίση από το λ . Αν λοιπόν επιδιώκαμε μια διακριτική ικανότητα της τάξεως των μερικών \AA , τότε ένα οπτικό μικροσκόπιο θα έπρεπε να «δουλέψει» με φωτόνια μερικών χιλιάδων eV, δηλαδή με ακτίνες X. Το οποίο, βεβαίως, έχει ανεπιθύμητες παρενέργειες για το δείγμα και, συνήθως, αποφεύγεται.

Αντίθετα, αν το μικροσκόπιό μας χρησιμοποιούσε *ηλεκτρόνια αντί φωτόνια* –δηλαδή *υλικά κύματα* αντί *ηλεκτρομαγνητικά*– τότε η διακριτική ικανότητα των μερικών \AA επιτυγχάνεται με ηλεκτρόνια πολύ χαμηλής ενέργειας (μερικά eV), τα οποία μπορούν άνετα να χρησιμοποιηθούν στις περισσότερες εφαρμογές. Αν μάλιστα η επιδιωκόμενη διακριτική ικανότητα μειωθεί στα 100 \AA –που είναι επαρκής ακρίβεια για τις περισσότερες βιολογικές χρήσεις του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου– τότε η αναγκαία ενέργεια μειώνεται στα εκατοστά του eV που είναι σίγουρα αβλαβής για το εξεταζόμενο δείγμα. (Δεν προκαλεί ιοντισμούς, ρήξεις χημικών δεσμών κ.λπ.)

Μια άλλη, κλασική πλέον, εφαρμογή των υλικών κυμάτων αφορά τα λεγόμενα *θερμικά νετρόνια* τα οποία παράγονται σε μεγάλες ποσότητες από τους πυρηνικούς αντιδραστήρες, αφού πρώτα επιβραδυνθούν, σκεδαζόμενα πάνω σε ένα υλικό με *ελαφρείς πυρήνες*^(*) (π.χ. γραφίτης) οπότε έρχονται σε θερμική ισορροπία μαζί του. Για τέτοιου είδους νετρόνια θα είναι $E(\text{eV}) \simeq (kT)_{T \simeq 300\text{K}} \simeq 1/40 \text{ eV}$, οπότε ο τύπος (2.16) θα δώσει

$$\lambda_n(\text{\AA}) \simeq \frac{0,3}{\sqrt{E(\text{eV})}} \simeq 0,3 \times \sqrt{40} \simeq 2 \text{\AA},$$

το οποίο σημαίνει ότι τα *θερμικά νετρόνια* είναι το κατ' εξοχήν κατάλληλο *υλικό κύμα* για κρυσταλλογραφικές μελέτες, αφού οι αποστάσεις μεταξύ των ατόμων του πλέγματος είναι της ίδιας τάξεως με το μήκος κύματος αυτών των νετρονίων.

Πηγαίνοντας προς το άλλο άκρο –δηλαδή προς τον μακρόκοσμο– ας δούμε τώρα πόσο είναι το μήκος κύματος ενός μορίου σκόνης, μάζας ενός χιλιοστού του γραμμαρίου, που κινείται με μια λογική ταχύτητα ενός εκατοστού το δευτερόλεπτο. Θα είναι τότε^(†)

$$\lambda = \frac{h}{mv} \simeq \frac{6 \times 10^{-27}}{10^{-3} \times 1} = 6 \times 10^{-24} \text{ cm}.$$

Όμως για να διαπιστωθεί η κυματική φύση ενός «σωματίου» με τόσο μικρό μήκος κύματος απαιτούνται πειράματα *συμβολής* ή *περίθλασης* μέσω σχισμών ή εμποδίων παρόμοιας διάστασης με την παραπάνω. Και τα οποία προφανώς δεν υπάρχουν στη φύση, αφού ακόμα και το μικρότερο αντικείμενο που διαθέτουμε –ο ατομικός πυρήνας– έχει διάσταση 10^{-13} cm .

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού της ύλης, παρ' ότι είναι κατ' αρχήν εφαρμόσιμη και στην κίνηση των μακροσκοπικών σωμάτων, εντούτοις δεν έχει γι' αυτά μετρήσιμες συνέπειες και, επομένως, μπορεί να αγνοηθεί.

Υπάρχει όμως ένα ακόμη σημείο σχετικά με τα υλικά κύματα που δεν πρέπει να περάσει απαρατήρητο σε τούτη τη συζήτηση. Είδαμε προηγουμένως ότι τα ατομικά ηλεκτρόνια θα πρέπει να έχουν μήκος κύματος της τάξεως του angstrom ώστε να μπορούν να υπάρξουν υπό τη μορφή ενός κατάλληλου στάσιμου κύματος μέσα στο άτομο. Θα πρέπει δηλαδή να είναι $\lambda_e \simeq 2a_0 \simeq a_0$ όπου a_0 η ακτίνα του ατόμου. Εντελώς ανάλογα για τα σωματίδια του πυρήνα –πρωτόνια και νετρόνια (\equiv νουκλεόνια)– θα πρέπει να ισχύει η

(*) Διότι μόνο τότε υπάρχει σημαντική μεταφορά ενέργειας από τα νετρόνια στους πυρήνες.

(†) Όταν κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς σε ένα συγκεκριμένο σύστημα μονάδων –εν προκειμένω το cgs– δεν είναι αναγκαίο να σημειώνουμε και τις μονάδες των μεγεθών που υπεισέρχονται. Διότι ξέρουμε εκ των προτέρων ότι το αποτέλεσμα θα είναι στην αντίστοιχη μονάδα αυτού του συστήματος.

$$\lambda_N \simeq 2R \simeq R$$

όπου R ($\simeq 10^{-13}$ cm) η ακτίνα του πυρήνα. Δεδομένου όμως ότι $\lambda = h/p$, θα έχουμε για την ορμή των νουκλεονίων τη σχέση τάξεως μεγέθους

$$p_N = \frac{h}{\lambda_N} \simeq \frac{h}{R}$$

και για την αντίστοιχη κινητική ενέργεια την $K_N = p_N^2/2m_N \simeq h^2/2m_N R^2$ από την οποία –για τις δεδομένες τιμές των h, m_N και R – προκύπτει αμέσως ότι

$$K_N \simeq \text{μερικά MeV,}$$

ότι δηλαδή τα σωματίδια του πυρήνα έχουν κινητικές ενέργειες *ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερες από ό,τι τα ηλεκτρόνια στα άτομα!* Και ο λόγος γι' αυτό είναι σαφής από τα προηγούμενα. Για να μπορέσουν να υπάρξουν μέσα στον πυρήνα, τα σωματίδιά του πρέπει να έχουν μήκος κύματος όσο περίπου το μέγεθός του –δηλαδή 10^{-13} cm– οπότε είναι υποχρεωμένα να έχουν και μια αντίστοιχα μεγάλη ορμή $p = h/\lambda$ άρα και αντίστοιχη ενέργεια.

Το συμπέρασμα είναι σαφές όσο και προκλητικό: *Ο πυρήνας έχει τόσο μεγάλη ενέργεια ακριβώς επειδή είναι τόσο μικρός. Είναι γίγαντας ενέργειας ακριβώς επειδή είναι νάνος μεγέθους!*

Διαπιστώνουμε έτσι ότι η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης –πριν καν βγει από το «κουκούλι» και γίνει «πεταλούδα» (δηλαδή πριν καν γίνει επισήμως αποδεκτή)– είναι σε θέση να προσφέρει εύλογες εξηγήσεις στα πιο βασικά μυστήρια όχι μόνο του ατόμου αλλά και του ίδιου του πυρήνα.

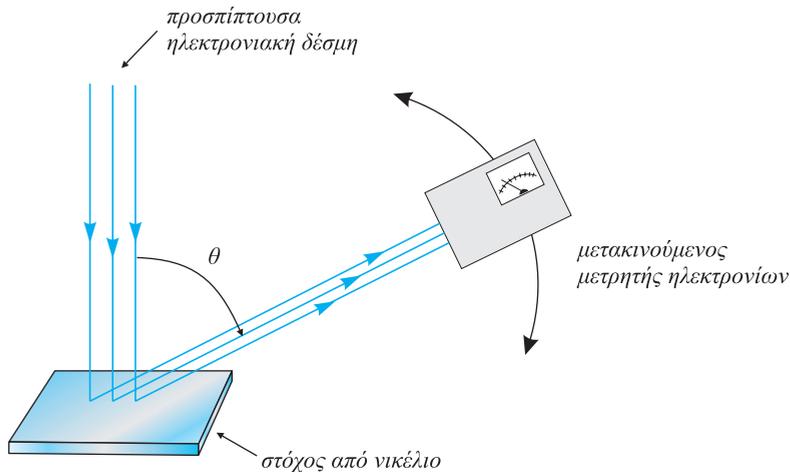
Ποιος θα δίσταζε να στοιχηματίσει στην έκβαση ενός πειράματος που θα υπέβαλλε σε άμεσο έλεγχο αυτή την αρχή;

4.3. Πειραματική επιβεβαίωση της υπόθεσης de Broglie.

Το πείραμα Davisson - Germer

Προκειμένου να μελετήσουν τη διάταξη των ατόμων στην επιφάνεια ενός πολυκρυσταλλικού δείγματος νικελίου οι Davisson και Germer πραγματοποίησαν το 1927 ένα πείραμα που έμελλε να αποδειχθεί ιστορικό, από μια απροσδόκητη εύνοια της τύχης. Χωρίς να έχουν καθόλου κατά νου την υπόθεση του de Broglie για τα υλικά κύματα –ίσως να μην την γνώριζαν καν– «βομβάρδισαν» την επιφάνεια του δείγματός τους με μια δέσμη ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας (μόλις μερικές δεκάδες eV) και μέτρησαν τον βαθμό της σκέδασής τους σε διάφορες γωνίες (Σχ. 2.9).

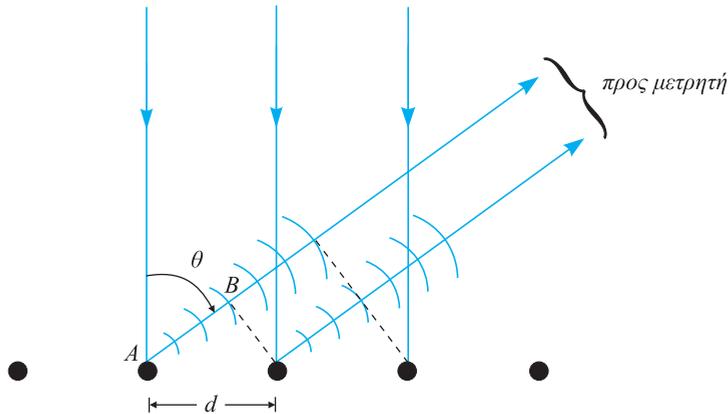
Τα πειραματικά αποτελέσματα ήταν αρχικά πολύ αδιάφορα –η τυχαία πολυκρυσταλλική σύνθεση του δείγματος δεν επέτρεπε στα ηλεκτρόνια να εκδηλώσουν την κυματική τους φύση– όταν ένα εργαστηριακό ατύχημα



ΣΧΗΜΑ 2.9: Σχηματική διάταξη του πειράματος Davisson-Germer. Μια δέσμη ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας πέφτει κάθετα πάνω στην επιφάνεια του δείγματος και ένας μετρητής τοποθετημένος διαδοχικά σε διάφορες γωνίες μετρά τη γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων ηλεκτρονίων. Η διάταξη είναι, βεβαίως, εγκλεισμένη μέσα σε έναν σωλήνα υψηλού κενού, ώστε αφ' ενός να μην υπάρχει σκέδαση των ηλεκτρονίων πάνω στα μόρια του αέρα και αφ' ετέρου για να αποφεύγεται η αλλοίωση της επιφάνειας του δείγματος από τις αναπόφευκτες οξειδωτικές αντιδράσεις.

άλλαξε άρδην την εξέλιξη του πειράματος. Κάποιος αδέξιος χειρισμός προκάλεσε θραύση του σωλήνα κενού και, βεβαίως, άμεση οξείδωση της επιφάνειας του μετάλλου. Για να αποκατασταθεί το δείγμα απαιτήθηκε μια μακρά διαδικασία θέρμανσής του (και όχι μόνο) που είχε ως αθέλητη παρενέργεια τη δημιουργία μεγάλων μονοκρυσταλλικών περιοχών στην επιφάνειά του. Η συνέχεια ήταν αναπόφευκτη όσο και δραματική. Επαναλαμβάνοντας το πείραμα, οι Davisson και Germer διαπίστωσαν, προς μεγάλη τους έκπληξη, ότι η γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων ηλεκτρονίων είχε μεταβληθεί ριζικά. Τα ανακλώμενα ηλεκτρόνια έδειχναν ισχυρή προτίμηση σε μια ορισμένη γωνία που εξαρτιόταν μόνο από την ενέργειά τους. Σε ένα συγκεκριμένο πείραμα, με ενέργεια προσπίπτουσας δέσμης 54 eV, η σκέδαση γινόταν, κατά ισχυρή προτίμηση, στις 50-51°. Συζητώντας με τους θεωρητικούς φυσικούς τα «περίεργα» αυτά αποτελέσματά τους, οι Davisson και Germer κατάλαβαν τελικά ότι είχαν μπροστά τους την πειραματική επιβεβαίωση ίσως του πιο θεμελιώδους από όλους τους φυσικούς νόμους. Είχαν «δει» την κυματική φύση των ηλεκτρονίων! Η θεωρητική ανάλυση του πειράματός τους φαίνεται σήμερα σχεδόν παιδική. Πέφτοντας κάθετα πάνω στην επιφάνεια του δείγματος, τα ηλεκτρόνια θα συναντήσουν πλέον (δηλαδή

μετά το «ατύχημα») έναν εκτεταμένο μονοκρυστάλλο του οποίου τα άτομα θα είναι τοποθετημένα σε μια περιοδική διάταξη –όπως στο Σχήμα 2.10– η οποία επαναλαμβάνεται, βεβαίως, μέσα και έξω από το χαρτί.



ΣΧΗΜΑ 2.10: Θεωρητική ανάλυση του πειράματος Davisson-Germer. Τα ηλεκτρόνια σκεδάζονται προνομιακά προς τις κατευθύνσεις θ που ικανοποιούν τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής $d \sin \theta = n\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Στο συγκεκριμένο πείραμα ($E = 54 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = 1,68 \text{ \AA}$ και $d = 2,15 \text{ \AA}$) η συνθήκη συμβολής ικανοποιείται μόνο για $n = 1$ και δίνει γωνία σκέδασης $\theta = 51^\circ$ σε πλήρη συμφωνία με το πειραματικό αποτέλεσμα.

Αν δεχτούμε τώρα την υπόθεση de Broglie, τότε η ανάλυση του πειράματος είναι πολύ απλή. Το προσπίπτον ηλεκτρονικό κύμα ανακλάται στις θέσεις των ατόμων του Ni υπό μορφήν σφαιρικών κυματιδίων του ίδιου μήκους κύματος όπως και το αρχικό. Τα κυματίδια αυτά συμβάλλουν ενισχυτικά μόνο προς εκείνες τις κατευθύνσεις θ για τις οποίες η διαφορά δρόμου $AB (= d \sin \theta)$ μεταξύ δύο γειτονικών ανακλώμενων «ακτίνων» είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ των ηλεκτρονίων. Δηλαδή όταν ισχύει η σχέση

$$d \sin \theta = n\lambda. \quad (2.17)$$

Στην προκειμένη περίπτωση είναι $d = 2,15 \text{ \AA}$ (αυτό ήταν γνωστό από παλαιότερες μετρήσεις του κρυσταλλικού νικελίου με περίθλαση ακτίνων X) και επίσης (σύμφωνα με τον τύπο (2.14) για $E = 54 \text{ eV}$)

$$\lambda(\text{\AA}) = \frac{12,4}{\sqrt{54}} = 1,68 \text{ \AA}.$$

Έτσι, η συνθήκη (2.17) θα δώσει

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = n \frac{1,68}{2,15} = 0,78n,$$

από όπου είναι φανερό ότι εκτός από την αυτονόητη κάθετη ανάκλαση ($n = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$) υπάρχει μόνο μία άλλη κατεύθυνση σκέδασης^(*) με γωνία

$$\sin \theta_1 = 0,78 \Rightarrow \theta_1 = 51^\circ,$$

ακριβώς όπως έδειξε το πείραμα! Τα κύματα de Broglie δεν είναι πια μια θεωρητική εικασία αλλά ένα αναμφίβολο πειραματικό γεγονός.

4.4. Η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού σήμερα.

Μια συνολική αποτίμηση

Μετά την πειραματική επιβεβαίωση της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων, μια αλυσίδα νέων πειραμάτων υπέβαλε σε εμπειρικό έλεγχο και την κυματική φύση όλων των άλλων γνωστών σωματιδίων. Και την επιβεβαίωσε με τόσο αναμφίβολο τρόπο ώστε η κυματική φύση της ύλης να θεωρείται σήμερα εξίσου δεδομένη με την κυματική φύση του φωτός. Το οποίο αντανακλάται, βεβαίως, στο γεγονός ότι οι δέσμες σωματιδίων –π.χ., ηλεκτρονίων ή νετρονίων– αποτελούν σήμερα ένα εργαλείο της «μικροσκοπίας» εξίσου κοινό με τις φωτεινές δέσμες. «Βλέπουμε» πλέον όχι μόνο με φως –με φωτεινά κύματα– αλλά και με μια, διαρκώς διευρυνόμενη, ποικιλία υλικών κυμάτων.

Τι γίνεται όμως με την άλλη πλευρά του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού; Τη σωματιδιακή φύση εκείνων των φυσικών οντοτήτων –όπως το φως– τις οποίες θεωρούσαμε πριν αποκλειστικά ως κύματα; Ποιος άλλος, πέρα από τα ΗΜ κύματα, υπάγεται σε αυτή την κατηγορία; Η απάντηση είναι, βεβαίως, γνωστή. Πρόκειται για τα *πεδιακά κύματα* που αντιστοιχούν σε όλες τις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης. Και οι οποίες, σύμφωνα με τη σχετικότητα, δεν μπορούν να έχουν στατικό χαρακτήρα –δηλαδή να διαβιβάζονται με *δράση εξ αποστάσεως*– αλλά θα πρέπει να διαδίδονται στον κενό χώρο με την ταχύτητα του φωτός, όπως και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Έτσι λοιπόν η βαρυτική αλληλεπίδραση θα πρέπει να διαδίδεται στον χώρο με *κύματα βαρύτητας*, η ισχυρή πυρηνική δύναμη με *κύματα ισχυρής δύναμης* και η ασθενής αλληλεπίδραση με *αντίστοιχα ασθενή κύματα*.

Και αν η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυΪσμού έχει όντως καθολική ισχύ, τότε όλα αυτά τα κύματα θα πρέπει να έχουν ταυτόχρονα και σωματιδιακή υπόσταση δίπλα στην κυματική. Έτσι, αν η ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχει ως σωματιδιακό φορέα το *φωτόνιο*, αντίστοιχα σωματίδια-φορείς θα πρέπει να υπάρχουν και για τις άλλες θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης.

^(*) Είναι φανερό ότι εδώ χρησιμοποιούμε τους όρους *ανάκλαση* και *σκέδαση* ως συνώνυμους.

Υπάρχουν όντως αυτά τα σωματίδια; Για τις ισχυρές και τις ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις τα σωματίδια-φορείς έχουν πράγματι ανακαλυφθεί και αποτελούν πλέον οργανικό τμήμα της σημερινής φυσικής. Οι ισχυρές δυνάμεις έχουν ως φορέα τους τα λεγόμενα *γλοιόνια*^(*) (gluons) ενώ οι ασθενείς δυνάμεις φέρονται από τα *σωματίδια* W^\pm και Z^0 . Είναι μάλιστα ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι –λόγω της πολύ μικρής εμβέλειάς τους– αυτές οι δύο θεμελιώδεις δυνάμεις δεν έχουν τη δυνατότητα να πραγματοποιηθούν ως κλασικές αλληλεπιδράσεις –με αντίστοιχα *ισχυρά* ή *ασθενή κύματα*– και μας γίνονται γνωστές κατευθείαν στο κβαντικό επίπεδο. Δηλαδή ως *κβαντικά πεδία* που φέρονται από αντίστοιχα σωματίδια-φορείς.

Για τη βαρύτητα –την ασθενέστερη και ίσως την πιο ιδιόμορφη από τις θεμελιώδεις δυνάμεις– η επιβεβαίωση της αρχής του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού μάλλον θα περιμένει για πολύ, αν και ουδείς δείχνει να αμφιβάλει για το αποτέλεσμα. Το σωματίδιο-φορέας έχει ήδη «βαπτιστεί» –ονομάζεται *βαρυτόνιο*– παρ' ότι δεν έχουν παρατηρηθεί ακόμα ούτε καν τα κλασικά βαρυτικά κύματα των οποίων το κβάντο πρόκειται να είναι το βαρυτόνιο. Αλλά και όταν τα κλασικά κύματα βαρύτητας θα έχουν παρατηρηθεί –ένα σχετικό πείραμα βρίσκεται ήδη σε εξέλιξη– η πειραματική διαπίστωση της κβάντωσής τους θα είναι ακόμα πολύ μακρινή. Για λόγους μάλλον προφανείς: για να μπορέσει να «δει» κανείς το κβάντο της βαρύτητας –το *βαρυτόνιο*– η συχνότητα του αντίστοιχου κλασικού βαρυτικού κύματος θα πρέπει να είναι τεράστια, ώστε η ενέργεια $\epsilon = hf$ του κάθε βαρυτικού κβάντου να είναι πειραματικά ανιχνεύσιμη. Όμως για να παραχθούν κύματα βαρύτητας με τέτοιες συχνότητες –π.χ., συγκρίσιμες με εκείνες του φωτός– κάποια κοσμικά αντικείμενα, όπως τα άστρα, θα πρέπει να πάλλονται με τελείως εξωπραγματικές συχνότητες. Η κβαντική φύση της βαρύτητας θα είναι έκδηλη μόνο σε ακραίες καταστάσεις της κοσμικής ύλης όπως, π.χ., εκείνες που αναμένεται να ισχύουν κατά τις πρώτες στιγμές της Μεγάλης Έκρηξης ή στη «γειτονιά» μιας χωροχρονικής ανωμαλίας όπως, π.χ., μιας μαύρης τρύπας.

Αν εξαιρέσουμε αυτή την εκκρεμότητα –που δεν αποκλείεται να κρύβει εκπλήξεις– η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού είναι σήμερα τόσο εδραιωμένη όσο και κάθε άλλη θεμελιώδης αρχή της σύγχρονης φυσικής. Και πάνω σε αυτή την αρχή θα οικοδομήσουμε τώρα μια νέα φυσική θεωρία: την *κβαντική μηχανική*.

^(*) Από την ελληνική λέξη *γλοιός* = κόλλα = κολλητική ουσία.

A: Αυτοεξέταση πολλαπλής επιλογής

1. Ένα αέριο ατομικού υδρογόνου βρίσκεται σε θερμοκρασία 127°C . Η μέση κινητική ενέργεια των ατόμων του θα είναι ίση με:
α) $0,5\text{ eV}$, β) $0,05\text{ eV}$, γ) $0,01\text{ eV}$, δ) $0,1\text{ eV}$.
2. Η μέση θερμική ταχύτητα των ατόμων του προηγούμενου αερίου θα είναι ίση με:
α) $3 \times 10^5\text{ cm/s}$, β) $3 \times 10^6\text{ cm/s}$, γ) $2 \times 10^7\text{ cm/s}$, δ) 10^7 cm/s .
3. Αν η πυκνότητα n του παραπάνω αερίου είναι 10^{16} cm^{-3} , ο αριθμός των κρούσεων που υφίσταται κάθε άτομο ανά δευτερόλεπτο θα είναι της τάξεως του:
α) 10^9 , β) 10^3 , γ) 10^5 , δ) 10^8 .
- ✓ 4. Υπό κανονικές συνθήκες, η πυκνότητα των μορίων του αέρα είναι περίπου 10^{20} μόρια/ cm^3 , η μέση θερμική τους ταχύτητα 10^5 cm/s και η διάμετρός τους γύρω στα 2 \AA . Σε κάθε δευτερόλεπτο ένα μόριο του αέρα συγκρούεται με κάποιο άλλο:
α) $\sim 10^3$ φορές, β) $\sim 10^{12}$ φορές, γ) $\sim 10^9$ φορές, δ) $\sim 10^5$ φορές.
- ✓ 5. Από τις παραμέτρους e, m και c ο μόνος συνδυασμός με διαστάσεις μήκους που μπορεί να κατασκευαστεί είναι ο:
α) me^2/c^2 , β) mc^2/e^2 , γ) e/mc , δ) e^2/mc^2 .
6. Από τις παραμέτρους e, m και \hbar ο μόνος συνδυασμός με διαστάσεις ενέργειας που μπορεί να κατασκευαστεί είναι ο:
α) \hbar^2/me^2 , β) me^4/\hbar^2 , γ) me^2/\hbar^4 , δ) me^2/\hbar^2 .
- ✓ 7. Κατά την αποδιέγερση $n = 3 \rightarrow n = 2$ του ατόμου του υδρογόνου, εκπέμπεται ένα φωτόνιο με μήκος κύματος:
α) $631,5\text{ \AA}$, β) 3.529 \AA , γ) 6.315 \AA , δ) $352,9\text{ \AA}$.
8. Από τα φωτόνια με τα ακόλουθα μήκη κύματος μόνο ένα μπορεί να προκαλέσει ιοντισμό του ατόμου του υδρογόνου. Ποιο είναι αυτό;
α) $\lambda = 1\text{ m}$, β) $\lambda = 8 \times 10^{-6}\text{ cm}$, γ) $\lambda = 6.000\text{ \AA}$, δ) $\lambda = 1.200\text{ \AA}$.
- ✓ 9. Το έργο εξαγωγής του τελευταίου ηλεκτρονίου του ατόμου του «νέου» ($Z = 10$) είναι ίσο με:
α) 136 eV , β) 272 eV , γ) 1.360 eV , δ) 13.600 eV .
10. Η ακτίνα περιφοράς του ηλεκτρονίου στην πρώτη τροχιά Bohr του He^+ (ιόν του ηλίου) είναι ίση με:
α) $1,5\text{ \AA}$, β) $0,5\text{ \AA}$, γ) $0,125\text{ \AA}$, δ) $0,25\text{ \AA}$.
11. Η ταχύτητα περιφοράς του ηλεκτρονίου στη δεύτερη διεγερμένη στάθμη του ατόμου του υδρογόνου είναι ίση με:
α) $\frac{1}{2}\alpha c$, β) $\frac{1}{3}\alpha c$, γ) $\frac{1}{9}\alpha c$, δ) $\frac{1}{4}\alpha c$.
όπου $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ η σταθερά της λεπτής υφής.

12. Από τις παραμέτρους \hbar , c και e ο μόνος αδιάστατος συνδυασμός που μπορεί να κατασκευαστεί είναι ο:
α) $e^2/\hbar c$, β) $e/\hbar c$, γ) $\hbar c/e$, δ) δεν υπάρχει τέτοιος συνδυασμός.
13. Από τις παραμέτρους \hbar , m και e ο μόνος αδιάστατος συνδυασμός που μπορεί να κατασκευαστεί είναι ο:
α) $e^2/\hbar m$, β) \hbar^2/me^2 , γ) me/\hbar^2 , δ) δεν υπάρχει τέτοιος συνδυασμός.
14. Στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου το ηλεκτρόνιο ζει –κατά μέσο όρο– γύρω στο 1 nsec. Κατά τη διάρκεια αυτής της «σύντομης» ζωής του το ηλεκτρόνιο πραγματοποιεί τον ακόλουθο αριθμό περιστροφών πάνω στην τροχιά του:
α) $\sim 10^9$, β) $\sim 10^4$, γ) $\sim 10^8$, δ) $\sim 10^6$.
- ✓ 15. Από τις ακόλουθες προτάσεις μόνο μία είναι σωστή. Ποια;
α) Η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης δεν ισχύει για την κίνηση μακροσκοπικών σωμάτων.
β) Ισχύει, αλλά δεν γίνεται αντιληπτή επειδή το σχετικό μήκος κύματος δεν ανήκει στην ορατή περιοχή του φάσματος.
γ) Ισχύει, αλλά δεν γίνεται αντιληπτή επειδή το σχετικό μήκος κύματος είναι πολύ μικρό για να μπορεί να μετρηθεί.
δ) Ισχύει, αλλά δεν γίνεται αντιληπτή επειδή η σχετική συχνότητα είναι πολύ μικρή για να μπορεί να μετρηθεί.
16. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στην πρώτη τροχιά του Bohr είναι ίση με:
α) 27,2 eV, β) 13,6 eV, γ) 6,8 eV, δ) 10,2 eV.
- ✓ 17. Το μήκος κύματος de Broglie ενός ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου είναι ίση με:
α) 0,5 Å, β) 2 Å, γ) 6,28 Å, δ) 3,14 Å.
- ✓ 18. Το μήκος κύματος de Broglie ενός ηλεκτρονίου που επιταχύνεται από μια διαφορά δυναμικού 10 kV είναι ίσο με:
α) 16 Å, β) 0,12 Å, γ) 100 Å, δ) 10 Å.
- ✓ 19. Σε μία από τις εκτελέσεις του πειράματος Davisson - Germer (όπου $d = 2,15 \text{ \AA}$) η προνομιούχα γωνία ανάκλασης ήταν η $\theta = 63^\circ$. Η ενέργεια της προσπίπτουσας ηλεκτρονιακής δέσμης θα ήταν τότε ίση με:
α) 84 eV, β) 56 eV, γ) 42 eV, δ) 32 eV.
20. Σε ένα άλλο πείραμα του προηγούμενου τύπου η χρησιμοποιούμενη δέσμη ηλεκτρονίων είχε ενέργεια 20 eV. Η προνομιούχα γωνία πλάγιας ανάκλασης θα είναι τότε ίση με:
α) 85° , β) 75° , γ) δεν συμβαίνει πλάγια ανάκλαση, δ) 79° .

B: Ασκήσεις και προβλήματα

- ✓ 1. Ποια είναι, κατά τη γνώμη σας, τα δύο βασικά μυστήρια που συνάντησε η κλασική φυσική όταν ωρίμασαν οι πειραματικές συνθήκες ώστε να μπορεί να συμπεριληφθεί στο πεδίο εφαρμογής της και ο ατομικός μικρόκοσμος; Περιγράψτε τα και εξηγήστε γιατί η κλασική φυσική βρίσκεται σε πλήρη αδυναμία να τα εξηγήσει.
- ✓ 2. Για να βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει καλά τον τρόπο εφαρμογής της συνθήκης Bohr, επαναλάβετε τη διαδικασία υπολογισμού που εφαρμόσαμε στο άτομο του υδρογόνου, για να βρείτε τα r_n, v_n, E_n και στην ακόλουθη περίπτωση κεντρικής δύναμης

$$F(r) = -gr^3$$

όπου το αρνητικό πρόσημο εκφράζει, βεβαίως, τον ελκτικό της χαρακτήρα. Η παραπάνω δύναμη χρησιμοποιείται συχνά ως υπόδειγμα ενός *μη αρμονικού νόμου δύναμης*, όπου η εξάρτηση από τη μετατόπιση δεν είναι πλέον γραμμική αλλά έχει τη μορφή μιας υψηλότερης δύναμης του r . Βεβαιωθείτε ότι τα αποτελέσματα που βρήκατε είναι διαστατικώς συνεπή.

- 3. Τι περιμένετε να συμβεί στην ακτίνα του Bohr ($a_0 = \hbar^2/me^2$) και στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης του ατόμου του υδρογόνου ($E_1 = -me^4/2\hbar^2$) όταν πάρετε καθένα από τα ακόλουθα όρια:

$$\alpha) \hbar \rightarrow 0, \quad \beta) m \rightarrow \infty;$$

Κάντε την πρόβλεψή σας –εξηγώντας το σκεπτικό της– και βεβαιωθείτε κατόπιν για την ορθότητά της.

- 4. Χρησιμοποιήστε διαστατική ανάλυση για να προβλέψετε εκ των προτέρων (δηλαδή χωρίς εφαρμογή της θεωρίας του Bohr) το πώς θα εξαρτάται η ακτίνα της θεμελιώδους τροχιάς, και η αντίστοιχη ενέργεια από τις παραμέτρους \hbar , m και g για ένα τυχόν κεντρικό δυναμικό της μορφής $V(r) = gr^m$ με δεδομένο n . Συμπίπτουν τα αποτελέσματα που βρήκατε με εκείνα που σας είναι ήδη γνωστά για $n = -1$ και $n = 2$;
- 5. Δύο προφανείς διορθώσεις που πρέπει να γίνουν στη θεωρία του Bohr για το άτομο του υδρογόνου είναι οι ακόλουθες: (α) Να ληφθεί υπ' όψιν ότι το πρωτόνιο, αν και πολύ βαρύτερο του ηλεκτρονίου, έχει πεπερασμένη μάζα και συνεπώς η μάζα του τελευταίου θα πρέπει να αντικατασταθεί με την *ενεργό μάζα* του συστήματος ηλεκτρόνιο-πρωτόνιο. (β) Να ληφθεί υπ' όψιν η *σχετικιστική μεταβολή της μάζας* του ηλεκτρονίου με την ταχύτητα, η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί τελείως αμελητέα αφού η ταχύτητα περιφοράς στην πρώτη τροχιά του Bohr είναι μόλις 137 φορές μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Ποια από αυτές τις δύο διορθώσεις είναι σημαντικότερη;
- ✓ 6. Το μοναδικό ηλεκτρόνιο του He^+ βρίσκεται στην πρώτη διεγερμένη στάθμη του. Υπολογίστε –σε μονάδες του συστήματος mks– το ηλεκτρικό δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην αντίστοιχη τροχιά.

- ✓ 7. Η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης βρίσκει άμεση πρακτική εφαρμογή τόσο στα *ηλεκτρονικά μικροσκόπια* όσο και στη χρήση *θερμικών νετρονίων* για τη μελέτη της κρυσταλλικής δομής –και των ατελειών της– στα στερεά σώματα. Εξηγήστε τη βασική ιδέα αυτών των εφαρμογών κάνοντας και όποιους αριθμητικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίοι προκειμένου να είναι απολύτως σαφής η εξήγησή σας. Εξηγήστε, ειδικότερα, γιατί το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο πλεονεκτεί έναντι του οπτικού μικροσκοπίου για τη διερεύνηση των ενδοκυτταρικών δομών και γιατί απαιτούνται θερμικά νετρόνια για τη μελέτη των στερεών κρυστάλλων.
- ✓ 8. Χρησιμοποιήστε τη συνθήκη δημιουργίας στάσιμων κυμάτων για να υπολογίσετε τις επιτρεπόμενες ενέργειες ενός σωματιδίου που είναι αναγκασμένο να κινείται ως ελεύθερο σωματίδιο μέσα σε έναν λεπτό σωλήνα μήκους L χωρίς όμως να μπορεί να εξέλθει από τα άκρα του. Όπως θα δούμε αργότερα, τέτοιου είδους περιορισμένη μονοδιάστατη κίνηση εκτελούν τα ηλεκτρόνια ορισμένων γραμμικών μακρομορίων.
9. Όπως όλοι γνωρίζετε –πρόκειται για ένα «μάθημα» που πληρώθηκε πολύ ακριβά–, χρειαζόμαστε χίλιους περίπου τόνους τρινιτροτολουόλης (TNT) για να πάρουμε την εκρηκτική ενέργεια που περιέχεται σε ένα μόλις κιλό πυρηνικού καυσίμου. Στην πρώτη περίπτωση πρόκειται για κοινή χημική αντίδραση στην οποία συμμετέχουν τα ατομικά ηλεκτρόνια ενώ στη δεύτερη έχουμε να κάνουμε με μια πυρηνική διαδικασία όπου λαμβάνουν μέρος τα σωματίδια του πυρήνα. Από τη σύγκριση των ενεργειακά ισοδύναμων μαζών προκύπτει ότι μια πυρηνική αντίδραση αποδίδει ένα περίπου εκατομμύριο φορές περισσότερη ενέργεια από ό,τι μια χημική. Με άλλα λόγια, τα σωματίδια του πυρήνα (πρωτόνια και νετρόνια) φαίνεται να είναι 10^6 φορές πιο ενεργοφόρα από τα ηλεκτρόνια των ατόμων. Εξηγήστε αυτό το θεμελιώδες χαρακτηριστικό του κόσμου μας βασιζόμενοι μόνο στο γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται σε μια περιοχί διαστάσεων ενός angstrom ($= 10^{-8}$ cm) ενώ τα νουκλεόνια είναι παγιδευμένα σε έναν όγκο ακτίνας μόλις ενός fermi ($1 \text{ fermi} \equiv 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$).

10. Συμπλήρωμα θεωρίας: Η συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld

- α) Μετά την επιτυχή εφαρμογή της συνθήκης κβάντωσης του Bohr στο άτομο του υδρογόνου ο Sommerfeld –σε συνεργασία με τον Bohr– πρότεινε την ακόλουθη γενίκευσή της

$$\oint p dq = nh \quad (1)$$

που είναι γνωστή ως η *συνθήκη κβάντωσης Bohr-Sommerfeld*. Για τον αναγνώστη –δηλαδή την πλειονότητα των αναγνωστών– που δεν έχει παρακολουθήσει ένα προχωρημένο μάθημα κλασικής μηχανικής, ας σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (1) –γνωστό ως *ολοκλήρωμα της δράσης*– αφορά μια κλειστή περιοδική τροχιά (εξ ου και το «κυκλάκι» στο σύμβολο της ολοκλήρωσης) ενώ τα q και p είναι ένα από τα συνήθη ζεύγη *συζυγών μεταβλητών* της κλασικής μηχανικής: (x, p_x) ,

$(y, p_y), \dots (\phi, \ell_z)$ κ.ο.κ. Ειδικότερα για $q = \phi$ (=γωνία στροφής περί τον άξονα z), οπότε είναι $p = \ell_z$ (=σταθερά για ένα κεντρικό δυναμικό), η (1) παίρνει τη μορφή

$$\oint \ell_z d\phi = \ell_z \oint d\phi = \ell_z \cdot 2\pi = nh$$

$$\Rightarrow \ell_z = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

που δεν είναι παρά η συνθήκη συνθήκη του Bohr.

Δείξτε τώρα ότι για μια μονοδιάστατη κίνηση σε ένα τυχόν δυναμικό $V(x)$ –και ειδικότερα για καταστάσεις δέσμιας κίνησης– η (1) παίρνει τη μορφή

$$2 \int_{x_1}^{x_2} p dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E - V(x))} dx = nh \quad (2)$$

όπου x_1, x_2 τα όρια της κλασικής κίνησης στο δυναμικό $V(x)$ για τη δεδομένη ενέργεια E . Εφαρμόστε την (2) για τον αρμονικό ταλαντωτή $-V(x) = kx^2/2$ – και υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

- β) Δείξτε ότι η συνθήκη κβάντωσης Bohr-Sommerfeld για μια μονοδιάστατη κίνηση –εξίσωση (2) του προηγούμενου ερωτήματος– μπορεί να προκύψει και ως συνέπεια της συνθήκης δημιουργίας στάσιμων κυμάτων στο διάστημα $L = x_2 - x_1$ της κλασικής κίνησης του σωματιδίου. Η βασική σκέψη είναι να χρησιμοποιήσετε ως p τη μέση ορμή $\bar{p} = \overline{p(x)}$, όπως ορίζεται με τον γνωστό τρόπο

$$\bar{p} = \frac{1}{L} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

και με ένα αντίστοιχο μέσο μήκος κύματος $\lambda = h/\bar{p}$.